Einschrittverfahren 2. Ordnung

Die Integrationsvorschrift eines Einschrittverfahrens lautet

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}, \tag{1}$$

wobei sich die Verfahrensfunktion $\phi(t_i, \eta_i, h)$ durch Vergleich mit der Taylor–Reihe

$$\bar{x}(t_i + h) = \eta_i + h\left[f + \frac{h}{2}(f_t + f_x f) + \cdots\right]_{t_i, \eta_i} \tag{2}$$

ergibt.

Als Ansatz für ein explizites Runge–Kutta–Verfahren 2. Ordnung wählt man

$$\phi(t, x, h) = b_1 f^{(1)} + b_2 f^{(2)}, \tag{3}$$

mit

$$f^{(1)} = f(t, x),$$

$$f^{(2)} = f(t + c_2 h, x + a_{21} h f^{(1)}).$$

Durch Entwicklung der Hilfssteigungen $f^{(1)}$ und $f^{(2)}$ in Taylor–Reihen nach h findet man bei Abbruch nach dem linearen Glied

$$f^{(1)} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad},$$

$$f^{(2)} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} + \ldots$$

Eingesetzt in den Ansatz (3) ergibt sich

$$\phi(t, x, h) = \underline{\qquad\qquad}\, f + \underline{\qquad\qquad}\, h f_t + \underline{\qquad\qquad}\, h f_x f$$

und durch Vergleich mit der Taylor–Reihe (2) das Gleichungssystem

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} &= 1 \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} &= \frac{1}{2} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} &= \frac{1}{2} \end{aligned}}$$

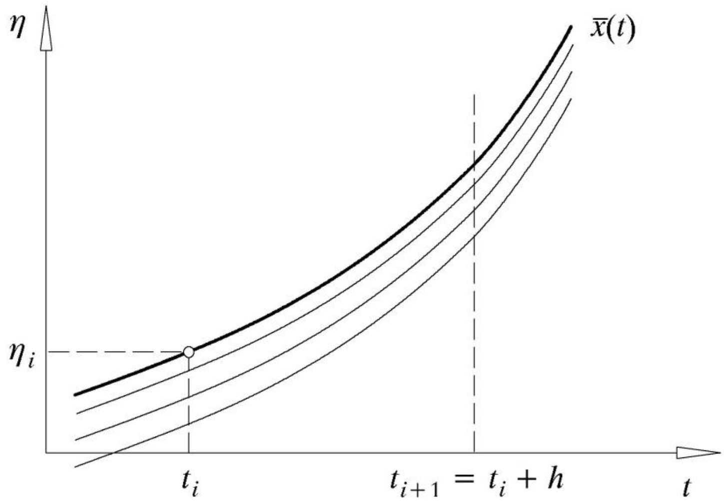
Mögliche Lösungen sind (dargestellt im BUTCHER–Block):

Verfahren von HEUN (1900):

0	0	0
1	1	0
	1/2	1/2

$\rightarrow \phi(t, x, h) =$ _______________________ .

Konstruieren Sie einen Integrationsschritt:



Verfahren von COLLATZ (1960):

0	0	0
1/2	1/2	0
	0	1

$\rightarrow \phi(t, x, h) =$ _______________________ .

Konstruieren Sie einen Integrationsschritt: