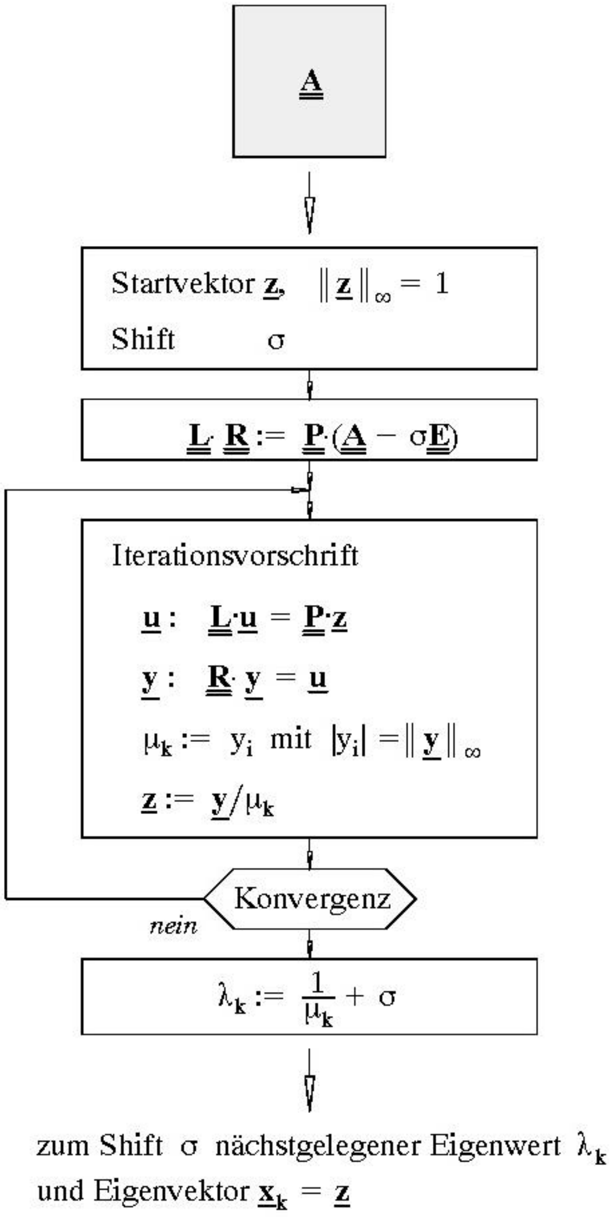
Inverse Vektoriteration

Voraussetzung: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat reelle Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$



Beispiel:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 9 & -8 & 9 \\ 11 & -11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, \quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ \frac{9}{11} & \frac{9}{11} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmung des 1. Eigenvektors:

Shift: $\sigma \coloneqq 5.1$

$$\boldsymbol{A} - \sigma\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix}$$

LR–Zerlegung:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.818 & 1 & 0 \\ -0.1 & 0.512 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 11 & -11 & 6.9 \\ 0 & -4.1 & 3.35 \\ 0 & 0 & -0.028 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iteration:

Startvektor: $\boldsymbol{z}^{(0)} \coloneqq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Abbildung:

$$\begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix}$$

Normierung: $\left\|\boldsymbol{y}^{(1)}\right\|_\infty :=$ _____

$\mu_k^{(1)} :=$ _____ , $\lambda_k^{(1)} :=$ ________________

$$\boldsymbol{z}^{(1)} := \frac{\boldsymbol{y}^{(1)}}{\mu_k^{(1)}} = \begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix}$$

Die weitere Iteration liefert:

s	Eigenvektor $\boldsymbol{z}^{(s)}$			$\lambda_1^{(s)}$
0	1.0000	.00000	.00000	
1	.19091	.81818	1.00000	5.0718182
2	.18210	.81818	1.00000	5.0031250
3	.18183	.81818	1.00000	5.0001007
4	.18182	.81818	1.00000	5.0000032
5	.18182	.81818	1.00000	5.0000001
6	.18182	.81818	1.00000	5.0000000

b) Bestimmung des 2. Eigenvektors:

Shift: $\sigma := 2.0001$

s	Eigenvektor $\boldsymbol{z}^{(s)}$			$\lambda_2^{(s)}$
0	1.0000	.00000	.00000	
1	-.09090	.81818	1.00000	2.0001273
2	-.09091	.81818	1.00000	2.0000000

c) Bestimmung des 3. Eigenvektors:

Shift: $\sigma := 1.0001$

s	Eigenvektor $\boldsymbol{z}^{(s)}$			$\lambda_3^{(s)}$
0	1.0000	.00000	.00000	
1	-.18181	.81818	1.00000	.6365091
2	-.10909	.81818	1.00000	1.8000317
3	-.09556	.81756	1.00000	1.9556243
4	-.00267	.99472	1.00000	1.0287075
5	.00000	1.00000	1.00000	.9999970
6	.00000	1.00000	1.00000	1.0000000