



Eigenfrequenzen einer Brücke

Die Berechnung der Eigenfrequenzen ω_i einer Brücke führt entsprechend Merkblatt M 2.3 auf die gewöhnliche Differentialgleichung

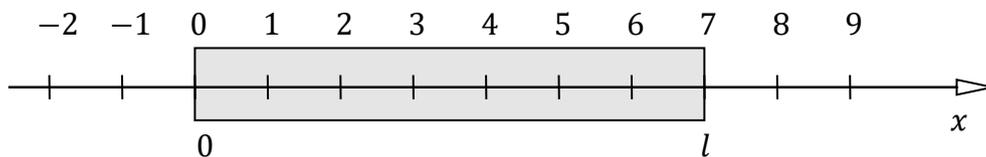
$$W^{IV} - \gamma^4 W = 0$$

für die Ortsfunktion $W(x)$, welche die Eigenformen beschreibt. Die Randbedingungen sind

$$W(0) = W(1) = W'(0) = W'(1) = 0$$

Dieses Randwertproblem ist nur für bestimmte Werte des Parameters $\gamma^4 = \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI}$ und damit nur für bestimmte Werte von ω , die Eigenfrequenzen ω_i , lösbar. Gesucht ist die erste Eigenfrequenz ω_1 .

Zur Lösung des Problems mit Hilfe finiter Differenzen wird die Brückenlänge in $n = 7$ gleiche Intervalle der Länge $h = \frac{1}{n}$ unterteilt:



Schreiben Sie die Differentialgleichung für jede Stützstelle $x_i = ih, i = 0(1)7$, an:

$$W_i^{IV} - \dots, i = 0(1)7.$$

Ersetzen Sie die Ableitungen W_i^{IV} durch zentrale Differenzen:

$$-\gamma^4 W_i = 0, i = 0(1)7.$$

Mit der Abkürzung

$$\lambda := \gamma^4 h^4 = \frac{\rho AL^4 \omega^2}{n^4 EI}$$

ergibt sich

$$W_{i-2} - 4W_{i-1} + 6W_i - 4W_{i+1} + W_{i+2} - \lambda W_i = 0, i = 0(1)7 \quad (1)$$

Dies sind 8 Gleichungen für 12 Unbekannte W_i . Die Punkte $-2, -1, 8, 9$ wurden eingeführt, um die Differenzenformeln auch auf die Ränder anwenden zu können.



Die erste Eigenform ist symmetrisch zur Balkenmitte. Es gilt

$$W_4 = \quad , W_5 = \quad , W_6 = \quad ,$$

$$W_7 = \quad , W_8 = \quad , W_9 = \quad .$$

Damit bleiben Gleichungen ($i = 0(1)3$) für Unbekannte $W_j, j = -2(1)3$.

Die Randbedingungen liefern für $i = 0$, unter Verwendung zentraler Differenzen:

$$W_0 = \quad ,$$

$$W_0' = \quad \text{oder } W_{-1} = \quad .$$

Die Unbekannte W_{-2} kann durch Auswerten der Gleichung (1) für $i = 0$ gefunden werden:

$$W_{-2} = \quad .$$

Damit bleiben 3 Gleichungen ($i = 1(1)3$) für 3 Unbekannte W_1, W_2, W_3 :

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}}_{A_2} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix} \right) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}}_{\hat{w}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Diese sind nur dann nichttrivial lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems singulär ist, d.h. wenn λ ein Eigenwert der symmetrischen, positiv definiten Matrix A_2 ist. Der gesuchte, kleinste Eigenwert ist

$$\lambda_1 = 0.1778264$$

und damit die erste Eigenfrequenz

$$\omega_1 = \quad .$$

Für andere Unterteilungen erhält man folgende Werte für die erste Eigenfrequenz:

n	7	9	11	exakt
$\frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}}$	20.66	21.30	21.64	22.37