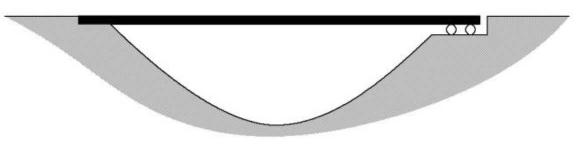
Eigenfrequenzen einer Brücke



Die Berechnung der Eigenfrequenzen ω_i einer Brücke führt entsprechend Merkblatt M 2.3 auf die gewöhnliche Differentialgleichung

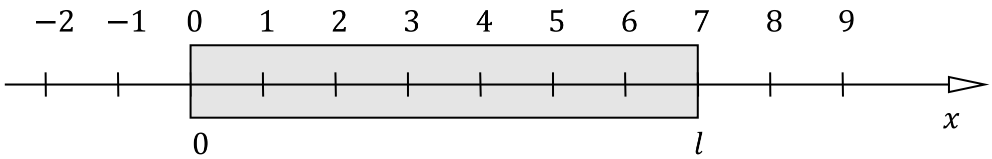
$$W^{IV} - \gamma^4 W = 0$$

für die Ortsfunkton $W(x)$, welche die Eigenformen beschreibt. Die Randbedingungen sind

$$W(0) = W(1) = W'(0) = W'(1) = 0$$

Dieses Randwertproblem ist nur für bestimmte Werte des Parameters $\gamma^4 = \frac{\rho A L^4 \omega^2}{EI}$ und damit nur für bestimmte Werte von ω, die Eigenfrequenzen ω_i, lösbar. Gesucht ist die erste Eigenfrequenz ω_1.

Zur Lösung des Problems mit Hilfe finiter Differenzen wird die Brückenlänge in $n = 7$ gleiche Intervalle der Länge $h = \frac{1}{n}$ unterteilt:



Schreiben Sie die Differentialgleichung für jede Stützstelle $x_i = ih, i = 0(1)7$, an:

$$W_i^{IV} - \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, i = 0(1)7.$$

Ersetzen Sie die Ableitungen W_i^{IV} durch zentrale Differenzen:

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ - \gamma^4 W_i = 0, i = 0(1)7.$$

Mit der Abkürzung

$$\lambda \coloneqq \gamma^4 h^4 = \frac{\rho A L^4 \omega^2}{n^4 EI}$$

ergibt sich

$$W_{i-2} - 4W_{i-1} + 6W_i - 4W_{i+1} + W_{i+2} - \lambda W_i = 0, i = 0(1)7 \qquad (1)$$

Dies sind 8 Gleichungen für 12 Unbekannte W_i. Die Punkte –2, –1, 8, 9 wurden eingeführt, um die Differenzenformeln auch auf die Ränder anwenden zu können.

Die erste Eigenform ist symmetrisch zur Balkenmitte. Es gilt

$W_4 =$ ______ , $W_5 =$ ______ , $W_6 =$ ______ ,

$W_7 =$ ______ , $W_8 =$ ______ , $W_9 =$ ______ .

Damit bleiben ___ Gleichungen $(i = 0(1)3)$ für ___ Unbekannte $W_j, j = -2(1)3$.
Die Randbedingungen liefern für $i = 0$, unter Verwendung zentraler Differenzen:

$W_0 =$ ______ ,

$W_0{}' =$ ______________ oder $W_{-1} =$ ______ .

Die Unbekannte W_{-2} kann durch Auswerten der Gleichung (1) für $i = 0$ gefunden werden:

$W_{-2} =$ __________________ .

Damit bleiben 3 Gleichungen $(i = 1(1)3)$ für 3 Unbekannte W_1, W_2, W_3:

$$\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}}_{A_2} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}\right) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}}_{\hat{w}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Diese sind nur dann nichttrivial lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems singulär ist, d.h. wenn λ ein Eigenwert der symmetrischen, positiv definiten Matrix $\boldsymbol{A_2}$ ist. Der gesuchte, kleinste Eigenwert ist

$$\lambda_1 = 0.1778264$$

und damit die erste Eigenfrequenz

$\omega_1 =$ ___________________ .

Für andere Unterteilungen erhält man folgende Werte für die erste Eigenfrequenz:

n	7	9	11	exakt
$\dfrac{\omega_1}{\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A L^4}}}$	20.66	21.30	21.64	22.37