Punktabbildungen in der Nichtlinearen Dynamik

Die Untersuchung nichtlinearer Abbildungen

$$x^{(k+1)} = \phi\left(x^{(k)}\right)$$

ist auch Teil der Nichtlinearen Dynamik. Entsprechend der Struktur der Rekursionsfunktion und in Abhängigkeit von Abbildungsparametern können solche Abbildungen Fixpunkte, periodische Lösungen, quasi–periodische Lösungen oder chaotisches Verhalten aufweisen.

Beispiel: Logistische Abbildung

$$x^{(k+1)} = \mu x^{(k)}\left(1 - x^{(k)}\right), \quad x \in [0,1], \quad \mu \in [0,4]$$

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte x^* der Abbildung in Abhängigkeit des Abbildungsparameters μ:

$$\_\_\_ \overset{!}{=} \mu \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \Rightarrow x_1^* = \_\_\_\_\_,$$

$$x_2^* = \_\_\_\_\_.$$

b) Bestimmen Sie die Ableitungen der Abbildungsfunktion an den Fixpunkten:

$$\phi'(x_1^*) = \_\_\_\_\_,$$

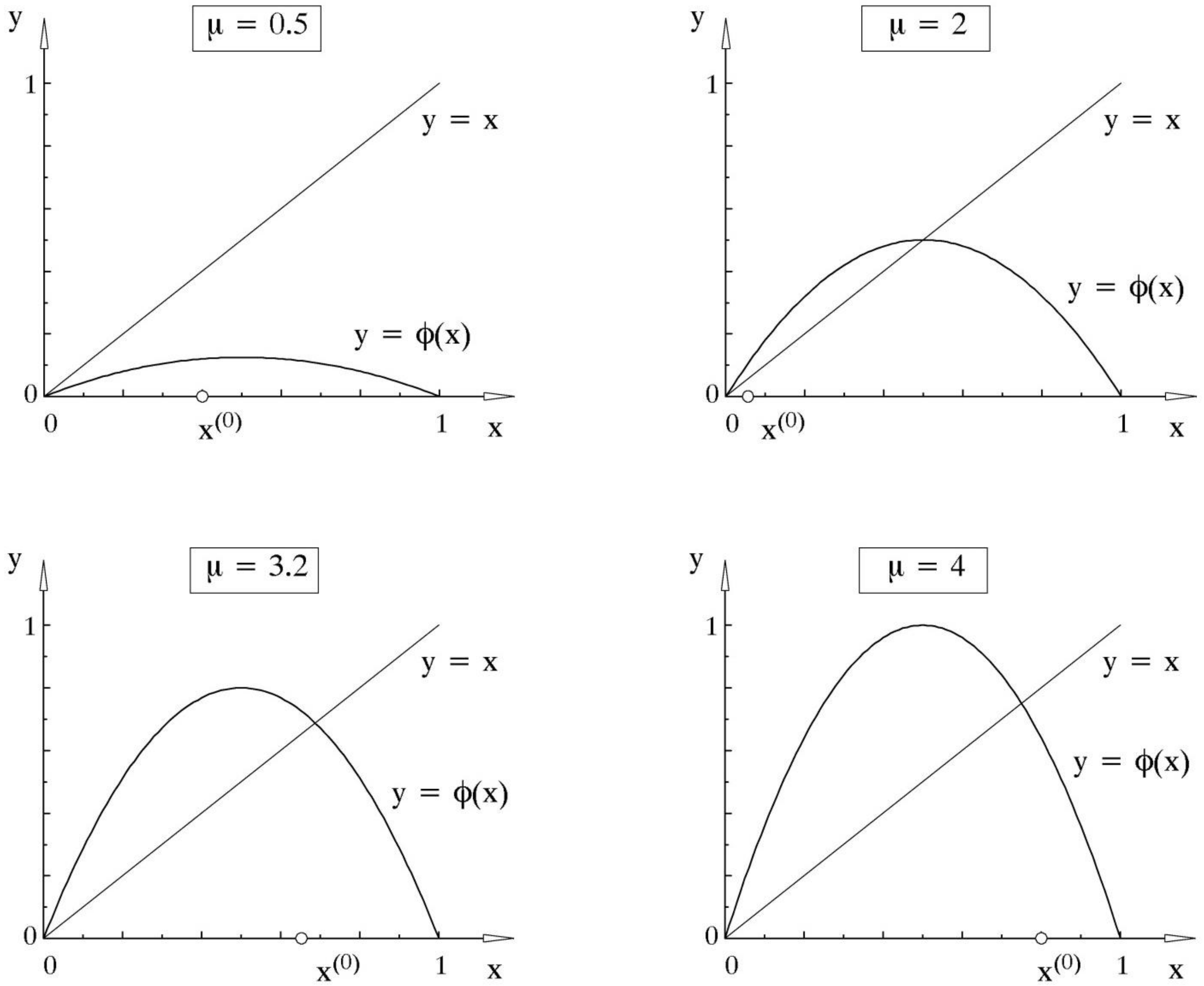
$$\phi'(x_2^*) = \_\_\_\_\_.$$

c) Geben Sie Intervalle für den Parameter μ an, in denen die Abbildung gegen den Fixpunkt x_1^* bzw. x_2^* konvergiert:

x_1^* ist stabiler Fixpunkt für $\mu \in \left(\_\_\_ , \_\_\_\right)$,

x_2^* ist stabiler Fixpunkt für $\mu \in \left(\_\_\_ , \_\_\_\right)$.

d) Führen Sie die Iteration für folgende Parameterwerte graphisch durch:



e) Das vollständige Lösungsverhalten in Abhängigkeit des Abbildungsparameters μ zeigt folgendes Bifurkationsdiagramm. Zeichnen Sie die Fixpunktkurven und Ihre Iterationslösungen in dieses Diagramm ein.