



Punktabbildungen in der Nichtlinearen Dynamik

Die Untersuchung nichtlinearer Abbildungen

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$

ist auch Teil der Nichtlinearen Dynamik. Entsprechend der Struktur der Rekursionsfunktion und in Abhängigkeit von Abbildungsparametern können solche Abbildungen Fixpunkte, periodische Lösungen, quasi-periodische Lösungen oder chaotisches Verhalten aufweisen.

Beispiel: Logistische Abbildung

$$x^{(k+1)} = \mu x^{(k)}(1 - x^{(k)}), \quad x \in [0,1], \quad \mu \in [0,4]$$

- a) Bestimmen Sie die Fixpunkte x^* der Abbildung in Abhängigkeit des Abbildungsparameters μ :

$$\begin{aligned} \overset{!}{=} \mu & \quad \Rightarrow x_1^* = \quad , \\ \text{-----} & \quad \text{-----} \\ & \quad x_2^* = \quad . \\ & \quad \text{-----} \end{aligned}$$

- b) Bestimmen Sie die Ableitungen der Abbildungsfunktion an den Fixpunkten:

$$\phi'(x_1^*) = \quad ,$$

$$\phi'(x_2^*) = \quad .$$

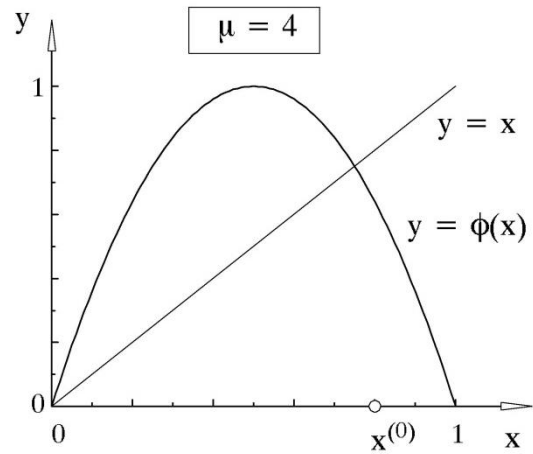
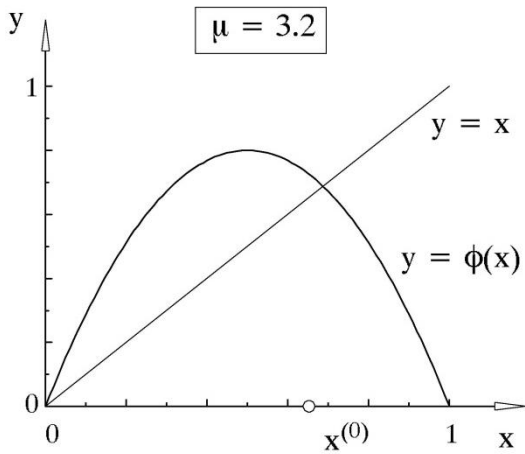
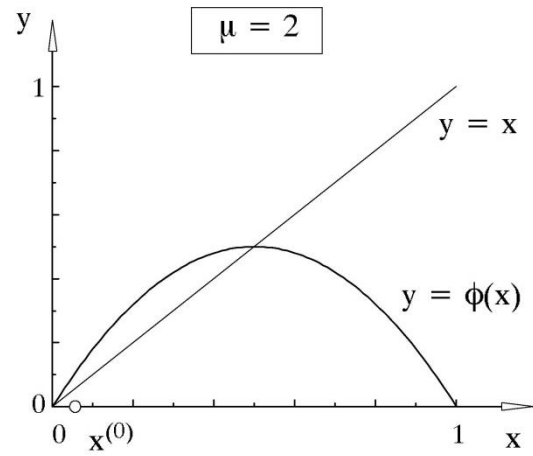
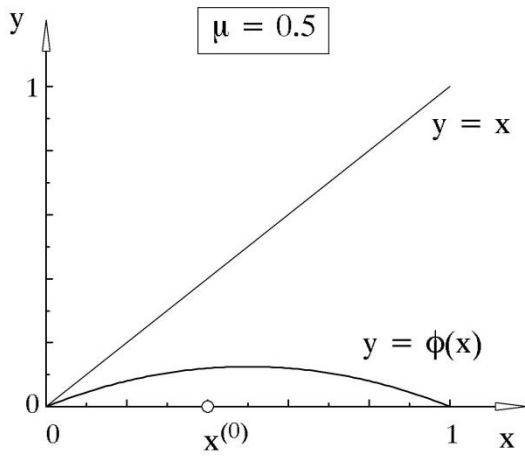
- c) Geben Sie Intervalle für den Parameter μ an, in denen die Abbildung gegen den Fixpunkt x_1^* bzw. x_2^* konvergiert:

$$x_1^* \text{ ist stabiler Fixpunkt für } \mu \in \left(\quad , \quad \right),$$

$$x_2^* \text{ ist stabiler Fixpunkt für } \mu \in \left(\quad , \quad \right).$$



d) Führen Sie die Iteration für folgende Parameterwerte graphisch durch:



e) Das vollständige Lösungsverhalten in Abhängigkeit des Abbildungsparameters μ zeigt folgendes Bifurkationsdiagramm. Zeichnen Sie die Fixpunktkurven und Ihre Iterationslösungen in dieses Diagramm ein.

