1 Grundlagen

Aufgabe 1.1. Nennen Sie Beispiele für Unsicherheiten in der Technischen Dynamik. Klassifizieren Sie diese nach ihrer Art.

2 Wahrscheinlichkeitstheorie

Aufgabe 2.1. Sei $\Omega = \{a, b, c, d\}$ eine Grundmenge. Welches der folgenden Mengensysteme ist eine σ-Algebra auf Ω?
(a) $\Sigma_1 = \{\emptyset, \Omega\}$.
(b) $\Sigma_2 = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \Omega\}$.
(c) $\Sigma_3 = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \Omega\}$.
(d) $\Sigma_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \Omega\}$.
(e) $\Sigma_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \Omega\}$.

Aufgabe 2.2. Finden Sie eine σ-Algebra auf $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, die die Mengen $A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$ und $A_2 = \{\omega_2, \omega_3\}$ enthält.

Aufgabe 2.3. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

(a) $A \cup B$, (b) $\bar{A} \cup C$, (c) $A \cap C$, (d) $A \cap \bar{B} \cap C$

im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$, wenn bezüglich der Ereignisse $A, B, C \in \Sigma$ folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt sind:

(i) $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{10}$, (iii) $\mathrm{P}(B) = \frac{7}{20}$, (v) $\mathrm{P}(\bar{C}) = \frac{7}{10}$,
(ii) $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{10}$, (iv) $\mathrm{P}(\bar{A} \cap C) = \frac{1}{4}$, (vi) $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{20}$.

Aufgabe 2.4. Ein fairer sechsseitiger Würfel werde zwei Mal hintereinander geworfen.
(a) Geben Sie für dieses Experiment den Grundraum Ω an und bestimmen sie mittels der Laplace-Formel die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse.
(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E : “Das Ergebnis des zweiten Wurfes ist um genau 2 größer als das Ergebnis des ersten Wurfes”.

Aufgabe 2.5. Eine unverfälschte Münze werde dreimal hintereinander geworfen.

(a) Geben Sie für dieses Experiment den Grundraum Ω und bestimmen sie die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse.

(b) Beschreiben Sie das Ereignis $A \subseteq \Omega$: "Im ersten Wurf fällt *Kopf* und im letzten Wurf fällt *Zahl*" und berechnen Sie dessen Wahrscheinlichkeit.

(c) Beschreiben Sie das Ereignis $B \subseteq \Omega$: "In den drei Würfen fällt *Kopf* häufiger als *Zahl*" und berechnen Sie dessen Wahrscheinlichkeit.

(d) Sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig?

Aufgabe 2.6. Eine Gruppe von Leuten besteht aus 60% Frauen. Von diesen sind 50% größer als 1,70m. Bei den Männern sind es 75%.

(a) Ein Mitglied der Gruppe wird zufällig bestimmt und dessen Größe gemessen. Er/Sie ist größer als 1,70m. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Frau handelt?

(b) Wie groß müsste der Frauenanteil in der Gruppe mindestens sein, damit diese Wahrscheinlichkeit größer als 0.75 ist?

Aufgabe 2.7. Wir betrachten das Zufallsexperiment zweifacher Würfelwurf mit Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die jedem $\omega \in \Omega$ den Betrag der Differenz der beiden Augenzahlen zuordnet.

(a) Wie sieht die Verteilung $p_X(x)$ aus?

(b) Wie sieht die kumulierte Verteilungsfunktion $F_X(x)$ aus?

Aufgabe 2.8. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x+3} & 0 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie c so, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte einer stetigen Zufallsvariablen X ist.

(b) Bestimmen Sie damit $\mathrm{P}(X \leq 3)$.

(c) Ermitteln Sie die Erwartungswerte $\mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{E}[X+3]$.

Aufgabe 2.9. Sei $Z \sim \text{beta}(\theta, 1)$ eine β-verteilte Zufallsvariable mit $\theta > 0$, d.h. die Dichtefunktion ist gegeben durch

$$f_Z(z) = \begin{cases} \theta z^{\theta-1} & z \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die kumulierte Verteilungsfunktion F_Z von Z.

(b) Bestimmen Sie die kumulierte Verteilungsfunktion F_Q von $Q = -\log(Z)$.

Aufgabe 2.10. Seien X und Y zwei reelle Zufallsvariablen mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cy^2(2-x-y) & (x,y) \in (0,1)^2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c so, dass $f_{X,Y}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte eines Zufallsvektors ist.
(b) Bestimmen Sie die Randdichten f_X und f_Y.
(c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{E}[Y]$.
(d) Bestimmen Sie die Varianzen $\mathrm{Var}[X]$ und $\mathrm{Var}[Y]$.
(e) Bestimmen sie die Korrelation $\mathrm{Corr}[X,Y]$.
(f) Sind X und Y stochastisch unabhängig?
(g) Sei $X = x \in (0,1)$ gegeben. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{Y|X=x}$ und den bedingten Erwartungswert $\mathrm{E}[Y|X=x]$.
(h) (optional) Bestimmen Sie die kumulierte Verteilungsfunktion F_Z und die Wahrscheinlichkeitsdichte f_Z der Zufallsvariablen $Z = X + Y$.

Aufgabe 2.11. Zeigen Sie für $a > 0$ und dem Erwartungswert μ der Zufallsvariable X, dass die Markov-Ungleichung

$$\mathrm{P}_X(X \geq a) \leq \frac{\mu}{a}$$

gilt.

Aufgabe 2.12. Die Heinsberg-Studie[1] geht davon aus, dass am 02.05.2020 bis zu 1.8 Millionen Einwohner Deutschlands mit dem neuartigen SARS-CoV-2-Virus infiziert gewesen sein könnten. Wenn der angegebene Prozentsatz an bundesweiten Infektionen ($p = 0.022$) als wahr angenommen wird und unter Annahme einer homogenen Infiziertenverteilung in Deutschland, in welchem Bereich lag dann die Anzahl an infizierten Studierenden der Uni Stuttgart ($n = 24.540$ im Wintersemester 2019/2020) mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit zu diesem Zeitpunkt? Berechnen Sie die Konfidenzintervalle jeweils wie folgt:
(a) Exakt über die Binomialverteilung
(b) Approximativ über die Normalverteilung
(c) Konservativ über die Markov-Ungleichung
(d) Konservativ über die Tschebyscheff-Ungleichung

[1] `https://www.uni-bonn.de/neues/111-2020`

3 Fuzzy-Mengentheorie

Aufgabe 3.1. Zwei Fuzzy-Mengen $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$ sind gegeben durch die dargestellten Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{\widetilde{A}}$ und $\mu_{\widetilde{B}}$ in Abbildung 1 gegeben.

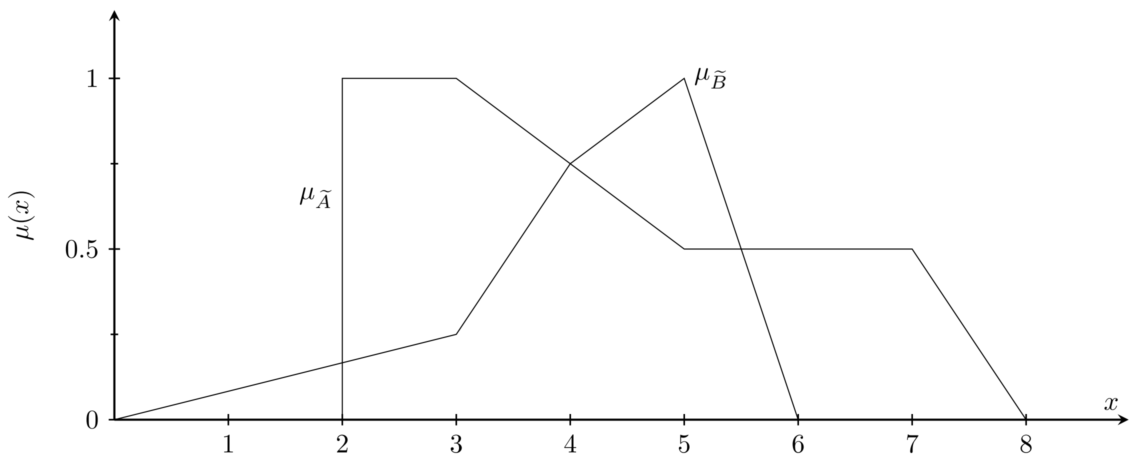


Abbildung 1: Zugehörigkeitsfunktionen der Fuzzy-Mengen $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$.

(a) Kennzeichnen Sie in der Skizze jeweils für $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$ den Kern, den Träger, die Höhe und die (strengen) Alphaschnitte für $\alpha = 0.5$.
(b) Bestimmen Sie zeichnerisch die Komplemente $\widetilde{A}^c$ und $\widetilde{B}^c$ der Mengen $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$
(c) Bestimmen Sie zeichnerisch den Durchschnitt $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ und die Vereinigung $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ vermittelt durch die folgenden t- und s-Normen:
   (i) beschränktes Produkt und beschränkte Summe,
   (ii) algebraisches Produkt und algebraische Summe,
   (iii) Minimum und Maximum.

Aufgabe 3.2. Gegeben sind die unscharfen Relationen $\widetilde{R}$, $\widetilde{S}$ und $\widetilde{T}$ durch

$\widetilde{R}$:

x \ y	1	2	3
1	1.0	0.4	0.0
2	0.4	0.8	0.6
3	0.0	0.4	0.8

$\widetilde{S}$:

x \ y	1	2	3
1	0.1	0.3	0.6
2	0.2	0.6	0.5
3	0.6	1.0	0.7

$\widetilde{T}$:

y \ z	1	2	3
1	0.0	0.2	0.4
2	0.1	0.4	0.8
3	1.0	0.6	0.8

Berechnen Sie die Verkettungsergebnisse

(a) $\widetilde{U} = \widetilde{R} \circ_{\mathrm{MM}} \widetilde{T}$ (b) $\widetilde{V} = \widetilde{R} \circ_{\mathrm{MP}} \widetilde{T}$ (c) $\widetilde{W} = (\widetilde{R} \cup \widetilde{S}) \circ_{\mathrm{MM}} \widetilde{T}$

Aufgabe 3.3. Über der Grundmenge $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ sind durch die Zugehörigkeitsfunktionen

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{x+3} \quad \text{und} \quad \mu_{\tilde{B}}(x) = \frac{|x|}{2\,(x+3)}\ , \quad x \in \Omega\ ,$$

zwei diskrete unscharfe Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ definiert.

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ die unscharfen Mengen $f(\tilde{A})$ und $f(\tilde{B})$ nach dem Erweiterungsprinzip.

Aufgabe 3.4. Gegeben sind die diskreten unscharfen Mengen

$$\tilde{A} = \{(0, 0.1), (1, 0.4), (2, 1.0), (3, 0.3), (4, 0.2)\}$$
$$\tilde{B} = \{(1, 0.2), (2, 0.6), (3, 1.0), (4, 0.5), (6, 0.1)\}$$

Berechnen Sie das Ergebnis von $f(\tilde{A}, \tilde{B})$ mit Hilfe des Erweiterungsprinzips für die Funktionen

(a) $f(x, y) = x \cdot y$

(b) $f(x, y) = \frac{x}{y} + 1$.

4 Unscharfe Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 4.1. Wir betrachten zwei Sensoren, die die Größe x messen.

(a) Modellieren Sie die folgenden Informationen mit geeigneten Grundüberzeugungsmaßen:
  (i) Sensor 1 besitzt die Zuverlässigkeit $r = 80\%$. Bei einem Sensorausfall wird ein zufälliger Wert x_1 ausgegeben, ansonsten liegt der wahre Wert der Messgröße im Bereich $x_1 \pm 0.1$.
  (ii) Sensor 2 fällt nie aus, dafür sind die Messungen x_2 ungenauer. Der wahre Wert befindet sich immer im Interval $x_2 \pm 0.3$ und mit 50%-iger Wahrscheinlichkeit im Interval $x_2 \pm 0.2$.

(b) Zu verschiedenen Zeitpunkten werden die folgenden Werte gemessen:

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
x_1	0.8	1.4	0.9	1.2	1.0
x_2	1.2	0.7	1.3	0.8	0.8

Kombinieren Sie die sich ergebenden Evidenzstrukturen und bestimmen Sie zu jedem Zeitpunkt das Überzeugungs- und das Plausibilitätsmaß für $x \leq 1$.

Aufgabe 4.2. Die unsichere Variable $X \in \{1,2,3,4\}$ besitzt die Evidenzverteilung m_X gegeben durch

i	1	2	3	4
A_i	$\{4\}$	$\{2,4\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,2,3,4\}$
$m_X(A_i)$	0.3	0.2	0.1	0.4

(a) Charakterisieren Sie die gegebene Evidenzverteilung.
(b) Ist die gegebene Evidenzverteilung konsistent zu der diskreten Gleichverteilung für X?
(c) Geben Sie die (konsistenten) Extremalwahrscheinlichkeitsverteilungen von X an.
(d) Berechnen Sie die obere und die untere Grenze des Erwartungswertes.

Aufgabe 4.3. Die unsichere Variable $A \in \{-2,-1,0,1,2\}$ besitzt eine Evidenzverteilung m_A gegeben durch

i	1	2	3	4	5
U_i	$\{-2,-1,0,1,2\}$	$\{-2,-1,0,1\}$	$\{-2,-1,0\}$	$\{-2,-1\}$	$\{-2\}$
$m_A(U_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

(a) Charakterisieren Sie die gegebene Evidenzverteilung.
(b) Berechnen Sie die Elementarplausibilitäten $\mathrm{Pl}_A(\{x\})$ für alle $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

Weiterhin ist die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ gegeben.

(c) Welche Evidenzverteilung $m_{f(A)}$ ergibt sich für die unsichere Variable $f(A)$? Charakterisieren Sie diese.
(d) Berechnen Sie die Elementarplausibilitäten $\mathrm{Pl}_{f(A)}(\{y\})$ für alle $y \in \{1,2,5\}$.
(e) Vergleichen Sie die Elementarplausibilitäten von A und $f(A)$ mit den Zugehörigkeitswerten der Fuzzy-Mengen $\tilde{A}$ und $f(\tilde{A})$ aus Aufgabe 3.3.

Aufgabe 4.4. Bestimmen Sie die Maße

(a) $\Pi(A \cup B)$, (b) $\mathrm{N}(A \cup B)$, (c) $\mathrm{N}(A \cap B)$, (d) $\Pi(C)$, (e) $\mathrm{N}(C \cap D)$

im Möglichkeitsraum (Ω, Σ, Π), wenn bezüglich der Ereignisse $A, B, C, D \in \Sigma$ folgende Möglichkeiten und Notwendigkeiten bekannt sind:

(i) $\Pi(B) = \frac{4}{10}$, (ii) $\mathrm{N}(\bar{A}) = \frac{3}{10}$, (iii) $\Pi(A \cup D) = \frac{7}{10}$, (iv) $\Pi(A \cup C) = 1$.

Aufgabe 4.5. Seien X und Y zwei reelle unsichere Variablen mit gemeinsamer Möglichkeitsdichtefunktion

$$\pi_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cy^2(2-x-y) & (x,y) \in (0,1)^2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie c so, dass $\pi_{X,Y}$ eine Möglichkeitsdichte eines Fuzzy-Vektors ist.
(b) Bestimmen Sie die Randdichten π_X und π_Y.
(c) Sind X und Y nicht-interaktiv oder stochastisch unabhängig?
(d) (optional) Bestimmen Sie die Möglichkeitsdichte π_Z und die kumulierte Möglichkeits- und Notwendigkeitsverteilungsfunktion $\Pi(Z \leq z)$ und $\mathrm{N}(Z \leq z)$ der unsicheren Variablen $Z = X + Y$.

Aufgabe 4.6. Zeigen Sie, dass die kumulative Warscheinlichkeitsverteilung F_X einer reellwertigen unsicheren Variable X auch eine konsistente Möglichkeitsdichte π_X derselben ist.
Zur Vereinfachung darf angenommen werden, dass F_X stetig und streng monoton steigend ist.

Aufgabe 4.7. Die unsichere Variable $X \in \mathbb{R}$ besitze die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie (numerisch) mittels der profilerhaltenden Transformationsvorschrift eine konsistente Möglichkeitsverteilung für X.

Aufgabe 4.8. Wir betrachten die unsichere Variable $Z \in \mathbb{R}$ mit der Möglichkeitsdichte

$$\pi_Z(z) = \begin{cases} z & z \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Für welche Werte von $\theta > 0$ sind die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_Z aus Aufgabe 2.9 und die Möglichkeitsverteilung Π_Z konsistent?
(b) Berechnen Sie die Möglichkeitsdichte der unsicheren Variablen $Q = -\log(Z)$.
(c) Für welche Werte von $\theta > 0$ sind die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_Q aus Aufgabe 2.9 und die Möglichkeitsverteilung Π_Q konsistent?

5 Vorwärtsprobleme

Aufgabe 5.1. Beschreiben Sie eine samplingbasierte Methode, um das Integral

$$Q = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \exp(-x^2) \mathrm{d}x$$

zu berechnen. Implementieren sie diese Methode. Welchen Wert nimmt Q an?

Aufgabe 5.2. Leiten Sie einen Ausdruck für das Ergebnis der folgenden Operationen auf einer intervallverteilten Variablen U her:

(a) $X = \exp(U)$, (b) $Y = U^2$ und (c) $Z = \sin(U)$.

Aufgabe 5.3. Es seien U und V zwei unsichere intervallverteilte Variablen mit den zugehörigen Trägern $I_U = [1, 2]$ und $I_V = [1, 2]$.
(a) Berechnen Sie $W_1 = U(U-V)$ und $W_2 = U^2-UV$ mittels Intervallarithmetik. Erklären Sie, wie die unterschiedlichen Ergebnisse für W_1 und W_2 zustande kommen.
(b) Berechnen Sie den tatsächlichen Träger von $W = U(U - V) = U^2 - UV$.

Aufgabe 5.4. Gegeben sind zwei nicht-interaktive trianguläre Fuzzy-Zahlen $\tilde{u}_1 = \mathrm{tfn}(3, 2, 2)$ und $\tilde{u}_2 = \mathrm{tfn}(4, 2, 4)$.

(a) Zerlegen Sie die Fuzzy-Zahlen $\tilde{u}_1$ und $\tilde{u}_2$ in Intervallmengen U_1 und U_2 der Form

$$U_i = \left\{X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(m)}\right\} = \left\{[l_i^{(0)}, r_i^{(0)}], [l_i^{(1)}, r_i^{(1)}], \dots, [l_i^{(m)}, r_i^{(m)}]\right\}$$

und legen Sie dabei die Diskretisierungsanzahl $m = 4$ zugrunde.

(b) Berechnen Sie unter Verwendung der klassischen Fuzzy-Arithmetik (auf der Grundlage der Intervallarithmetik) die Fuzzy-Zahl

$$\tilde{w} = \tilde{w}\left(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\right) = \frac{(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1)^2}{\tilde{u}_1}$$

(durch „direkte Auswertung“) und geben Sie das Ergebnis als zerlegte Fuzzy-Zahl in Form der Intervallmenge

$$W_\mathrm{I} = \left\{Z^{(0)}, Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}\right\}$$

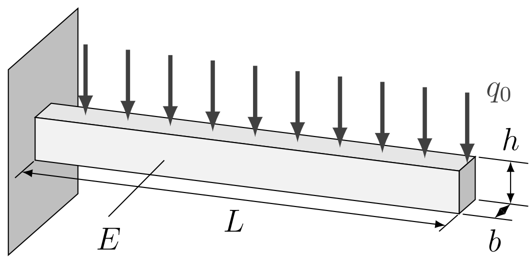
an.

(c) Berechnen Sie die Fuzzy-Zahl $\tilde{w}$ aus b) unter Verwendung der (reduzierten) Transformationsmethode und geben Sie das Ergebnis als zerlegte Fuzzy-Zahl in Form der Intervallmenge

$$W_{\mathrm{T}} = \left\{Z^{(0)}, Z^{(1)}, \ldots, Z^{(m)}\right\}$$

an.

Aufgabe 5.5. Wir betrachten einen einseitig fest eingespannten Euler-Bernoulli-Balken mit der Länge $L = 1.00\,\mathrm{m}$ und der Breite $b = 0.02\,\mathrm{m}$, der einer gleichmäßig verteilten Last $q_0 = 130\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ ausgesetzt ist. Diese Größen sollen als genau bekannt angenommen werden.



Über das Elastizitätsmodul E des Balkens und dessen Höhe h stehen jedoch nur begrenzte Informationen zur Verfügung. Aus umfangreichen Materialstudien ist bekannt, dass das Elastizitätsmodul E einer Normalverteilung mit dem Erwartungswert $\mu_E = 200\,\mathrm{GPa}$ und der Standardabweichung $\sigma_E = 20\,\mathrm{GPa}$ folgt. Die Höhe h des Balkens wurde mit einem Messschieber auf 20 mm bestimmt. Die Messungenauigkeit des Messschiebers beträgt ± 1 mm.
Die Durchbiegung der Balkenspitze w kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$w = \frac{q_0 L^4}{8EI}.$$

Darin ist das Flächenträgheitsmoment I für einen rechteckigen Querschnitt durch $I = \frac{bh^3}{12}$ gegeben.

(a) Modellieren Sie die unsicheren Eingangsgrößen als Möglichkeitsverteilungen und kombinieren Sie diese in einer gemeinsamen Eingangsverteilung.
Hinweis: Verwenden Sie die in Aufgabe 4.7 implementierte profilerhaltende Transformation.

(b) Berechnen Sie numerisch mit Hilfe des Erweiterungsprinzips die Möglichkeitsverteilung der unsicheren Ausgangsgröße $\tilde{w}$.

(c) Geben Sie auf Grundlage der Ausgangsmöglichkeitsverteilung ein 99%-Konfidenzintervall für die Durchbiegung der Balkenspitze w an.

(d) Wie verändert sich das Konfidenzintervall, wenn die Höhe des Balkens durch ein genaueres Messgerät auf $h = 20.9$ mm $\pm\, 0.1$ mm bestimmt werden kann?

(e) Welche elementare Unsicherheit bleibt bei dieser Betrachtung unberücksichtigt?