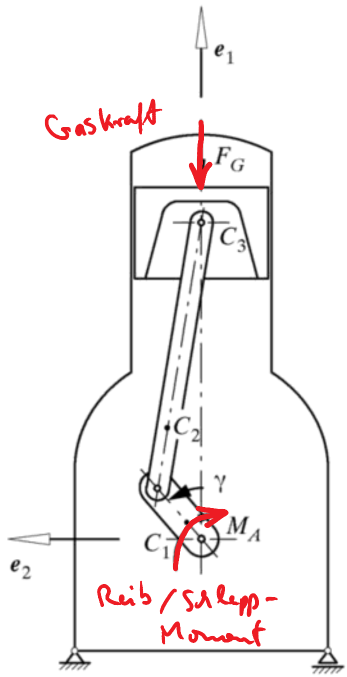
Nichtlineare Bewegungsgleichung des Einzylindermotors

Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen werden neben den in Arbeitsblatt A8 entwickelten kinematischen Grundlagen folgende Angaben benötigt:



1. Massengeometrie

Die Kurbel, das Pleuel und der Kolben haben folgende Massen und auf den jeweiligen Massenmittelpunkt bezogene Hauptträgheitsmomente

Kurbel	m_1, I_{1z}
Pleuel	m_2, I_{2z}
Kolben	m_3

Unter der Voraussetzung, dass die z−Achse jeweils Hauptträgheitsachse ist, lauten die wesentlichen Elemente der Trägheitstensoren im raumfesten Koordinatensystem

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{1z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{2z} \end{bmatrix}$$

2. Eingeprägte Kräfte und Momente

Als eingeprägte Kräfte und Momente wirken neben den Gewichtskräften die Gaskraft F_G und das Abtriebswiderstandsmoment M_A

$$\mathbf{f}_1^e = \begin{bmatrix} -m_1 g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2^e = \begin{bmatrix} -m_2 g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_3^e = \begin{bmatrix} -m_3 g - F_G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{l}_1^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_A \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_2^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Formulieren Sie die Newton−Eulerschen Gleichungen

transl.: Kurbel, Pleuel, Kolben — rot.: Kurbel, Pleuel

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -m_1 s\sin\gamma \\ m_1 s\cos\gamma \\ 0 \\ m_2(-r\sin\gamma - b\delta'\sin\delta) \\ m_2(r\cos\gamma - b\delta'\cos\delta) \\ 0 \\ m_3(-r\sin\gamma - l\delta'\sin\delta) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{13} \\ 0 \\ 0 \\ -I_{23}\delta' \end{bmatrix}}_{\bar{\bar{M}}\cdot\bar{\bar{J}}} \underbrace{\ddot{\gamma}}_{\underline{\ddot{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -m_1 s\cos\gamma \\ -m_1 s\sin\gamma \\ 0 \\ m_2(-r\cos\gamma - b\delta''\sin\delta - b\delta'^2\cos\delta) \\ m_2(-r\sin\gamma - b\delta''\cos\delta + b\delta'^2\sin\delta) \\ 0 \\ m_3(-r\cos\gamma - l\delta''\sin\delta - l\delta'^2\cos\delta) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\delta'' I_{23} \end{bmatrix}}_{\bar{q}^c} \dot{\gamma}^2 = \underbrace{\begin{bmatrix} -m_1 g \\ 0 \\ 0 \\ -m_2 g \\ 0 \\ 0 \\ -m_3 g - F_G \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{q}^e} + \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^r \\ f_2^r \\ f_3^r \\ l_1^r \\ l_2^r \end{bmatrix}}_{\bar{q}^r = \bar{\bar{Q}}\cdot g}$$

$$\bar{\bar{M}} \cdot \bar{\bar{J}}: \quad \begin{bmatrix} \bar{\bar{E}}m_1 & & & & 0 \\ & \bar{\bar{E}}m_2 & & & \\ & & \bar{\bar{E}}m_3 & & \\ & & & \bar{\bar{I}}_1 & \\ 0 & & & & \bar{\bar{I}}_2 \end{bmatrix}$$

Schreiben Sie die Jacobi−Matrix des Gesamtsystems an

$$\bar{\mathbf{J}}^{T} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} -s\sin\gamma & s\cos\gamma & 0 & \begin{matrix}-r\sin\delta \\ -b\,\delta'\sin\delta\end{matrix} & \begin{matrix}r\cos\delta \\ -b\,\delta'\cos\delta\end{matrix} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\delta' \end{array} \right]$$

in diesem Fall
ein Zeilenvektor

Die Bewegungsgleichung ergibt sich nun durch Elimination der Zwangskräfte. Ergänzen und vereinfachen Sie die folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
&\{m_1\, s^2 \\
&\quad + m_2\,(r^2 - 2rb\,\delta'\cos(\gamma+\delta) + b^2\,\delta'^2 \quad) \\
&\quad + m_3\,(r\sin\gamma + \ell\,\delta'\sin\delta \ )^2 \\
&\quad + I_{1z} \\
&\quad + I_{2z} \quad \delta'^2 \qquad \}\,\ddot{\gamma} \\
&+ \{ m_2\,(-rb\,\delta''\cos(\gamma+\delta) + rb\,\delta'^2\sin(\gamma+\delta) + rb\,\delta'\sin(\gamma+\delta) + b^2\,\delta'\,\delta'') \\
&\quad + m_3\,[(-r\cos\gamma - \ell\,\delta''\sin\delta - \ell\,\delta'^2\cos\delta)(-r\sin\gamma - \ell\,\delta'\sin\delta)] \\
&\quad + I_{2z} \quad \delta'\,\delta'' \qquad \}\,\dot{\gamma}^2 \\
&= m_1\,(\ s\sin\gamma \ )\,g \\
&\quad + m_2\,(r\sin\gamma + b\,\delta'\sin\delta)\,g \\
&\quad + m_3\,(r\sin\gamma + \ell\,\delta'\sin\delta)\,g \\
&\quad + F_G\,(r\sin\gamma + \ell\,\delta'\sin\delta) \\
&\quad - M_A
\end{aligned}$$

oder abgekürzt $\boxed{\mathbf{M}\,\ddot{\gamma}} + \boxed{\mathbf{k}\,\dot{\gamma}^2} = \boxed{\mathbf{q}}$.