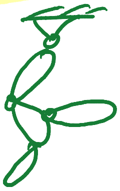
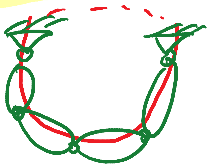
Kinematik des Einzylindermotors

Info:

Einfacher Fall:
MKS mit Baumstruktur

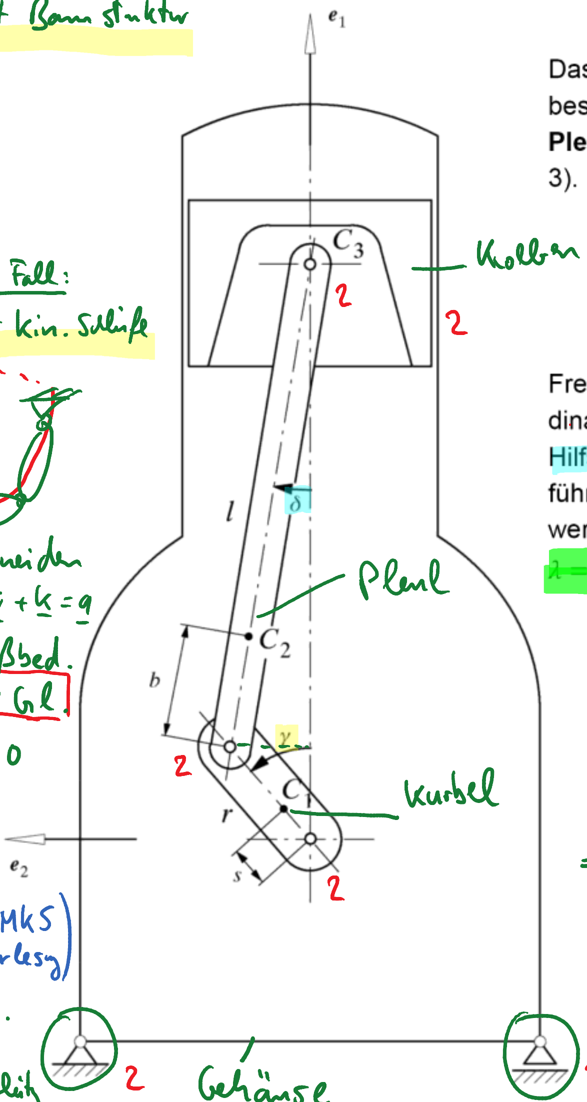


Komplizierter Fall:
MKS mit kin. Schleife



1. Aufschneiden
$\boxed{\text{ODE}}$: $\underline{M}\,\ddot{\underline{y}} + \underline{k} = \underline{q}$
+ 2. Schließbed.
$\boxed{\text{algebraische Gl.}}$
$\underline{c}(\underline{y}) = 0$
⇓
$\boxed{\text{DAE}}$ (FMKS Vorlesung)

hier: Schließbed. wird schon bei der Herleitung in Form der Hilfsvar. berücksichtigt



Das Kurbelgetriebe des Einzylindermotors besteht aus der **Kurbel** (Körper 1), dem **Pleuel** (Körper 2) und dem **Kolben** (Körper 3). Das Kurbelgetriebe hat

ebene Bewegung
4 Körper, $f^u = 4 \cdot 3 = 12$

$f = \underline{1 = f^u - n}$ $n^c = 11$ ... Summe aller Lagerwertigkeiten

$n = n^c$, da statisch bestimmt gelagert

Freiheitsgrade. Als verallgemeinerte Koordinate wird der Winkel γ und als abhängige Hilfsvariable der ~~Kurbel~~ Pleuelwinkel $\delta(\gamma)$ eingeführt. Die geometrischen Abmessungen werden durch das Lenkstangenverhältnis $\lambda = \frac{r}{l}$ gekennzeichnet.

a) Welche Beziehungen bestehen zwischen der verallgemeinerten Koordinate γ und der Hilfsvariablen δ?

Kreisgl.: $\sin^2\delta + \cos^2\delta = 1$

$l \sin\delta = r \sin\gamma$

$\Rightarrow$ (1) $\sin\delta = \lambda \sin\gamma$

(2) $\cos\delta = \sqrt{1 - \sin^2\delta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\gamma}$

$\Rightarrow \delta = \arcsin(\lambda \sin\gamma)$

b) Für die zeitlichen Ableitungen der Hilfsvariable δ,

$$\boxed{\frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial\delta}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dt} = \delta'\,\dot\gamma} \quad \& \quad \boxed{\frac{d\delta'}{dt} = \frac{\partial\delta'}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dt} = \delta''\,\dot\gamma}$$

Kettenregel ("äußere mal innere Ableitung")

sollten zunächst die partiellen Ableitungen der Hilfsvariablen nach der verallgemeinerten Koordinate γ berechnet werden. Vervollständigen Sie diese.

$$\frac{\partial(\arcsin x)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$ (HM-Formelsammlung)

innere Ableitung

(3) $$\frac{\partial\delta}{\partial\gamma} := \delta' = \frac{\lambda\cos\gamma}{\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\gamma}} = \frac{\lambda\cos\gamma}{\cos\delta} = \frac{u}{v}$$

Gl. (2)

$u' = -\lambda \sin\gamma \overset{(1)}{=} -\sin\delta$

$v' = -\delta' \sin\delta \overset{(3)}{=} -\frac{\lambda\cos\gamma}{\cos\delta}\sin\delta$

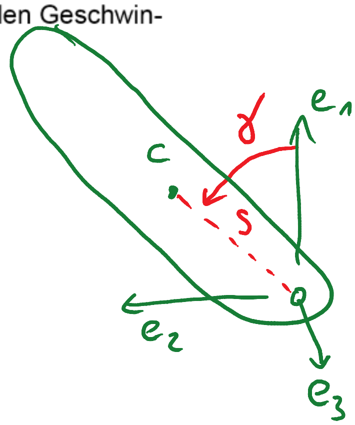
$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = (u\,v^{-1})' = u'\,v^{-1} - u\,v'\,v^{-2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$ Quotientenregel

aus (2): $1-\lambda^2\sin^2\gamma$ & $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$

(4) $$\frac{\partial\delta'}{\partial\gamma} := \delta'' = \frac{-\sin(\delta)\cos(\delta)+\lambda\cos(\gamma)\frac{\lambda\cos(\gamma)}{\cos(\delta)}\sin(\delta)}{\cos^2\delta} = \frac{\sin(\delta)\left(\lambda^2\cos^2(\gamma)-\cos^2(\delta)\right)}{\cos^3\delta} = \frac{\sin\delta(\lambda^2-1)}{\cos^3\delta}$$

Berechnen Sie die Ortsvektoren, Drehtensoren, Jacobi-Matrizen, die lokalen Geschwindigkeiten und die lokalen Beschleunigungen der folgenden Bauteile:

c) **Kurbel**:



$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} s\cos\gamma \\ s\sin\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

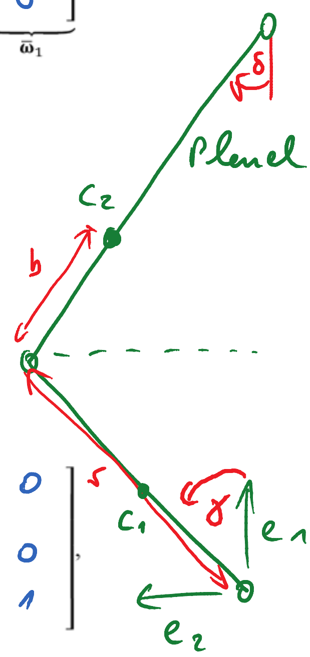
Aus Anschauung

$$\mathbf{v}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial\gamma}\begin{bmatrix} -s\sin\gamma \\ s\cos\gamma \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T1}} \cdot \dot{\gamma} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}_1}, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R1}} \cdot \dot{\gamma} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_1}$$

Lokale Beschleunigung

$$\bar{\mathbf{a}}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} -s\dot{\gamma}\cos\gamma \\ -s\dot{\gamma}\sin\gamma \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\dot{J}}}_{T1}} \cdot \dot{\gamma} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_1, \qquad \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\dot{J}}}_{R1}} \cdot \dot{\gamma} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_1$$

d) **Pleul**:



!! neg. Elementar-Drehung

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} r\cos\gamma + b\cos\delta \\ r\sin\gamma - b\sin\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

!!! innere Ableitung nicht vergessen, da $\delta = \delta(\gamma)$

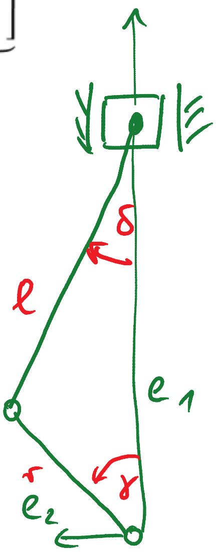
$$\underline{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta' \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

Aufg. Teil b)

$$\frac{d}{dt}\delta = \delta' \dot{\gamma} \qquad \frac{d}{dt}\delta' = \delta'' \dot{\gamma}$$

$$\mathbf{v}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} -r\sin\gamma - b\delta'\sin\delta \\ r\cos\gamma - b\delta'\cos\delta \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T2}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}_2}, \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta'\dot{\gamma} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta' \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R2}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_2}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\gamma}(-r\cos\gamma - b\delta''\sin\delta - b\delta'^2\cos\delta) \\ \dot{\gamma}(-r\sin\gamma - b\delta''\cos\delta + b\delta'^2\sin\delta) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{\underline{J}}}_{T2}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_2, \qquad \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta''\dot{\gamma} \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{\underline{J}}}_{R2}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_2$$



e) **Kolben**:

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} r\cos\gamma + l\cos\delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} -r\sin\gamma - l\delta'\sin\delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T3}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}_3}, \qquad \boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \underline{0} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R3}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_3}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} -r\dot{\gamma}\cos\gamma - l\delta''\dot{\gamma}\sin\delta - l\delta'^2\dot{\gamma}\cos\delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{\underline{J}}}_{T3}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_3, \qquad \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{\underline{J}}}_{R3}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_3$$