Matrizenalgebra und Matrizenanalysis

Aufgabe 1

Bilden Sie mit den Vektoren und Matrizen

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ folgende Produkte und Größen:

Skalarprodukt $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b} =$ --------

Dyadisches Produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^{\mathrm{T}} =$ --------

Quadratische Form $\mathbf{a}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} =$ --------

Determinante $\det \mathbf{A} =$ --------

Adjungierte $\operatorname{adj} \mathbf{A} =$ --------

Inverse $\mathbf{A}^{-1} =$ --------

Aufgabe 2

a) Mit welchen Kriterien lässt sich die Definitheit einer Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ und den Hauptminoren/Hauptabschnittsdeterminaten $H_1, H_2, \ldots, H_n$ bestimmen?

	Definition für Quadratische Form	**Eigenwerte** $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$	**Hauptminoren/** Hauptabschnittsdeterminaten $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & & \cdots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$
positiv definit	$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} > 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$		
positiv semidefinit	$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{x}$		
negativ definit	$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} < 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$		
negativ semidefinit	$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq 0 \quad \forall\, \mathbf{x}$		
Indefinit	sonst		

b) Bestimmen Sie die Definitheit der folgenden Matrizen:

	a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$	c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$	d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
positiv definit	☐	☐	☐	☐
positiv semidefinit	☐	☐	☐	☐
negativ definit	☐	☐	☐	☐
negativ semidefinit	☐	☐	☐	☐
indefinit	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 3

Die Matrix $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ beschreibt eine pos. Drehung um die z−Achse.

a) Wie berechnet sich die Inverse einer orthogonalen Matrix $\mathbf{A}$? $\mathbf{A}^{-1} =$ _______

b) Berechnen Sie die Determinante der Drehmatrix.

$\det(\mathbf{S}) =$ ____________________________________ $=$ ______

c) Bestimmen Sie $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ und das Produkt $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}$ mit $\mathbf{r} = [a,\ b,\ 0]$.

d) Wie lautet $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ bei einer Drehung mit dem Vektor der Winkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$?

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Bonus-Aufgabenteile:

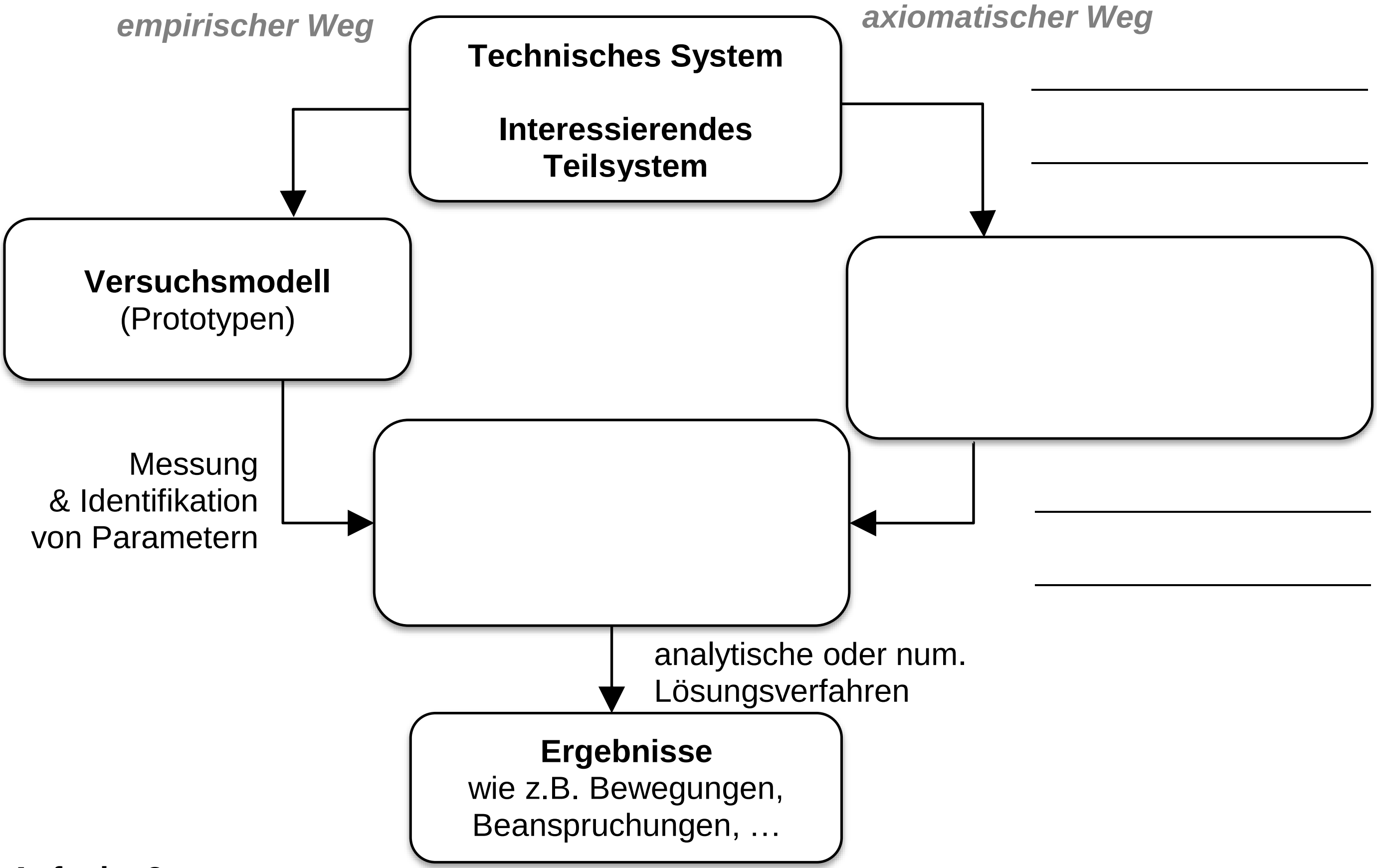
e) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{S}$ orthogonal ist.

f) Zeigen Sie, dass das Produkt $\dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ für jede beliebige orthogonale Matrix $\boldsymbol{S}$ schiefsymmetrisch ist. (Hinweis: Verwenden Sie die Definition $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$ der Orthogonalität.)

Modellbildung

Aufgabe 1

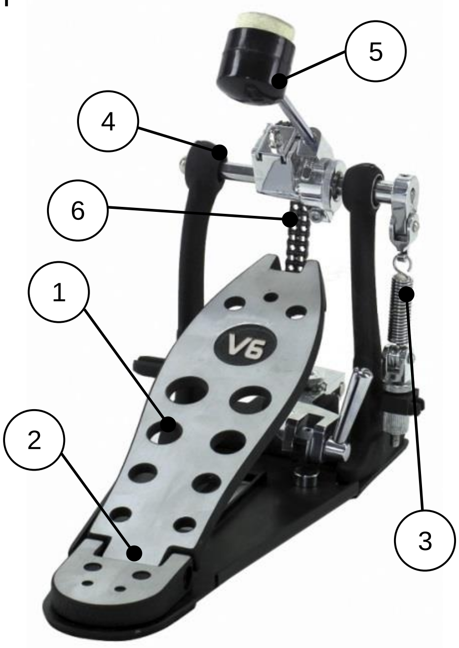
Bei der Modellbildung lassen sich grundsätzlich zwei Vorgehensweisen, den empirischen Weg und den axiomatischen Weg, unterscheiden. Ergänzen Sie das Diagramm zum Vorgehen bei der Analyse technischer Systeme.



Aufgabe 2

Zur Dynamik-Untersuchung eines Bassdrum-Pedals wird dieses als Mehrkörpersystem modelliert. Ordnen Sie den verschiedenen Bauteilen entsprechende MKS-Elemente zu.

Nr	Bauteil	Starrkörper	Koppelelem.	Bindungselem.
1	Pedalplatte			
2	Pedalscharnier			
3	Fußmaschinenfeder			
4	Kugellagerung der Welle			
5	Beater			
6	Doppelkette als Lagestellglied			



Aufgabe 3

Zur Untersuchung der Dynamik eines Garagentores soll dieses in ein ebenes Mehrkörpersystem (MKS) abgebildet werden.

a) Skizzieren Sie ein geeignetes Mehrkörpermodell in die Abbildung. Verwenden Sie dazu die Symbole der Mehrkörperdynamik.

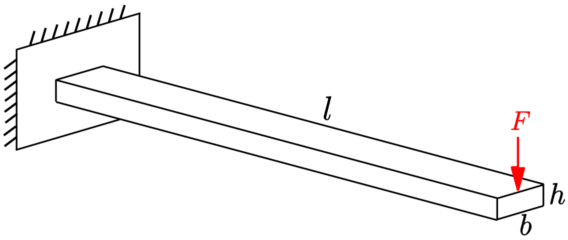
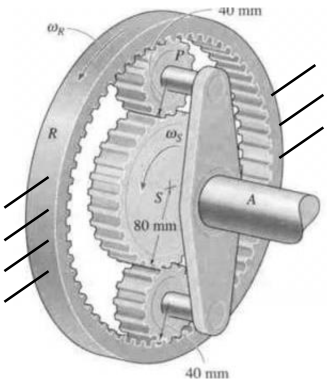
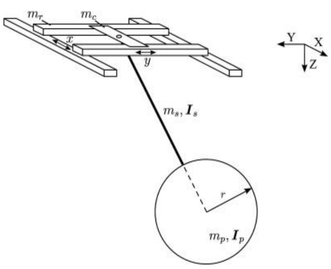
b) Welche Elemente lassen sich den verschiedenen Bauteilen zuordnen und welche Idealisierungen bzw. Vernachlässigungen werden dabei durchgeführt?

Bauteil	**Mehrkörperelement**	**Idealisierung/ Vernachlässigung**
obere Führungsschiene		
Garagentor		
unterer Führungshebel		
Lagerung des Führungshebels		
Abfederung		

c) Welcher Modelltyp müsste herangezogen werden, wenn zusätzlich die Elastizität des Garagentores berücksichtigt werden soll?

Aufgabe 4

Ordnen Sie den folgenden Beispielskizzen ein geeignetes mechanisches Ersatzmodell (MKS, FEM, KOS) zu und bestimmen Sie die Anzahl der Freiheitsgrade.

<table>
<tr><th>Systems</th><th>mechanisches Ersatzmodell</th><th>Anzahl Freiheitsgrade</th></tr>
<tr><td> mit Ω = konst angetriebenes Riesenrad mit k Gondeln</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td> 
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Kinematik eines Massenpunktes

Ein freier Massenpunkt P kann im dreidimensionalen Raum durch die kartesischen Koordinaten seines Ortsvektors beschrieben werden. Im raumfesten Koordinatensystem $\{0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ erhält man $\mathbf{r}(\mathrm{t}) = \mathrm{r}_1(\mathrm{t})\,\mathbf{e}_1 + \mathrm{r}_2(\mathrm{t})\,\mathbf{e}_2 + \mathrm{r}_3(\mathrm{t})\,\mathbf{e}_3 = [\mathrm{r}_1(\mathrm{t})\ \ \mathrm{r}_2(\mathrm{t})\ \ \mathrm{r}_3(\mathrm{t})]$.
Andererseits kann die Lage des Massenpunkts auch mittels krummliniger bzw. verallgemeinerter Koordinaten $\mathbf{x}(\mathrm{t})$ beschrieben werden. Zwischen dem **Orts**vektor $\mathbf{r}(\mathrm{t})$ und dem **Lage**vektor $\mathbf{x}(\mathrm{t})$ besteht dann ein i.a. nichtlinearer Zusammenhang $\mathbf{r}(\mathbf{x}(\mathrm{t}))$.

Die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Massenpunktes lässt sich auf zwei unterschiedliche Arten bestimmen:

1. **Direkte Differentiation der Koordinaten des Ortsvektors $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ nach der Zeit**

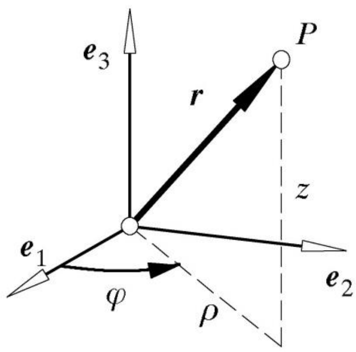
$$\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{dt}} \quad , \qquad \mathbf{a}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}^2}$$

2. **Differentiation des Ortsvektors $\mathbf{r}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ als Funktion der krummlinigen Koordinaten nach der Zeit unter Anwendung der Kettenregel**

$$\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{dt}} = \mathbf{H}_\mathrm{T} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad , \qquad \mathbf{a}(\mathrm{t}) = \mathbf{H}_\mathrm{T} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{H}}_\mathrm{T} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

Aufgabe 1

a) Beschreiben Sie die Lage des Massenpunkts mit den Zylinderkoordinaten $\mathbf{x}(\mathrm{t}) = [\rho\ \ \varphi\ \ \mathrm{z}]$.



$$\mathbf{r}(\mathbf{x}(\mathrm{t})) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Massenpunkts mit der zweiten Methode.

$$\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\mathrm{z}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}(\mathrm{t}) = \mathbf{H}_\mathrm{T} \cdot \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{a}}}$$

Drehmatrix und Winkelgeschwindigkeit

Aufgabe 1

a) Vervollständigen Sie die Matrizen der Elementardrehungen bei Kardan-Winkeln.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \_\_\_ & \_\_\_ \\ 0 & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} \_\_\_ & 0 & \_\_\_ \\ 0 & 1 & 0 \\ \_\_\_ & 0 & \_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_3 = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & 0 \\ \_\_\_ & \_\_\_ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

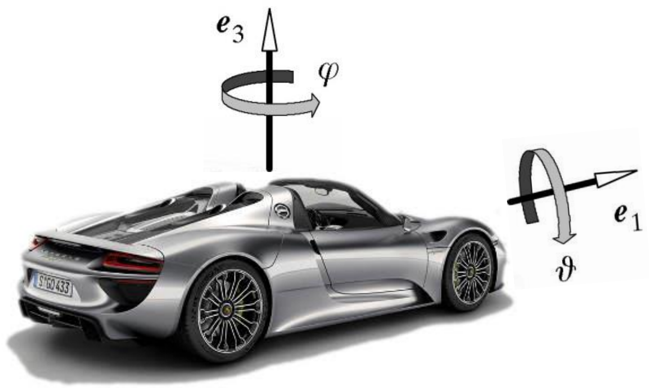
b) Wie berechnet sich der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{R}$ im körperfesten Referenzsystem, wenn er im Innertialsystem mit $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{I}$ gegeben ist?

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{I} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{R} = \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_ \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \_\_\_\_ \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2

Die Verdrehung eines fahrzeugfesten Koordinatensystems R aufgrund seiner Gier- und Wankbewegung gegenüber dem Inertialsystem I lässt sich durch 2 aufeinander folgende Elementardrehungen beschreiben. Die Gierbewegung ist eine Drehung um die vertikale Achse mit dem Winkel φ, die Wankbewegung eine anschließende Drehung um die Längsachse mit dem Winkel ϑ.



a) Berechnen Sie die Drehmatrix $\mathbf{S}$.

$$\mathbf{S} = \_\_\_\_\_\_\_ = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie den Winkelgeschwindigkeitsvektor des Fahrzeugs im Inertialsystem und im körperfesten Koordinatensystem aus der Anschauung:

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \_\_\_\_\_\_ \cdot \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{R} = \_\_\_\_\_\_ \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

c) Berechnen Sie nun den Drehgeschwindigkeitstensor formal und vergleichen Sie damit Ihr obiges Ergebnis.

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{I} = \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}^\mathrm{T} =$$

$$\begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_\mathrm{I} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

d) Welcher Rechenweg ist schneller?

◯ Anschauung b) ◯ formale Rechnung c)

e) Welche Regeln gelten für die Transformation von Vektoren?

◯ $\mathbf{a}_\mathrm{I} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}_\mathrm{R}$ ◯ $\mathbf{a}_\mathrm{I} = \mathbf{S}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{a}_\mathrm{R}$

◯ $\mathbf{a}_\mathrm{R} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}_\mathrm{I}$ ◯ $\mathbf{a}_\mathrm{R} = \mathbf{S}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{a}_\mathrm{I}$

f) Transformieren Sie $\boldsymbol{\omega}_R$ in das Inertialsystem und überprüfen Sie nochmals Ihre Ergebnisse.

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{I} = \underline{\quad\quad} \cdot \boldsymbol{\omega}_\mathrm{R} = \begin{bmatrix} \underline{\cos\varphi} & \underline{-\sin\varphi\cos\vartheta} & \underline{\sin\varphi\sin\vartheta} \\ \underline{\sin\varphi} & \underline{\cos\varphi\cos\vartheta} & \underline{-\cos\varphi\sin\vartheta} \\ \underline{0} & \underline{\sin\vartheta} & \underline{\cos\vartheta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\quad\quad} \\ \underline{\quad\quad} \\ \underline{\quad\quad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad\quad} \\ \underline{\quad\quad} \\ \underline{\quad\quad} \end{bmatrix}$$

g) Wie lauten die Regeln zur Transformation eines Tensors zweiter Stufe $\mathbf{A}$?

- ◯ $\mathbf{A}_\mathrm{I} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}_\mathrm{R}$
- ◯ $\mathbf{A}_\mathrm{I} = \mathbf{S}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{A}_\mathrm{R} \cdot \mathbf{S}$
- ◯ $\mathbf{A}_\mathrm{I} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}_\mathrm{R} \cdot \mathbf{S}^\mathrm{T}$
- ◯ $\mathbf{A}_\mathrm{R} = \mathbf{S}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{A}_\mathrm{I} \cdot \mathbf{S}$

Bonus-Aufgabenteile:

h) Das körperfeste Koordinatensystem R sei ein Hauptachsensystem, so dass der Trägheitstensor Diagonalform hat

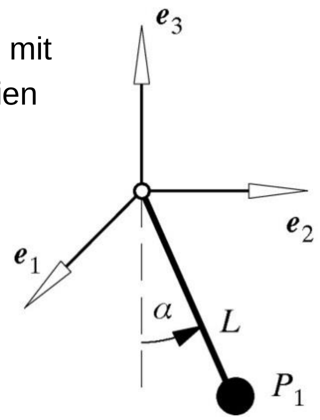
$$\mathbf{I}_\mathrm{R} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{C} \end{bmatrix}.$$

Führen Sie mit geeigneten Abkürzungen für die trigonometrischen Funktionen ($\mathrm{s}_\varphi \coloneqq \sin\varphi$, $\mathrm{c}_\varphi \coloneqq \cos\varphi$, etc.) eine Transformation des Trägheitstensors in das Inertialsystem durch

$$\mathbf{I}_\mathrm{I} = \underline{\quad\quad\quad\quad\quad} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \mathrm{A}\,\mathrm{c}_\varphi^2 \\ +\mathrm{B}\,\mathrm{s}_\varphi^2\mathrm{c}_\vartheta^2 \\ +\mathrm{C}\,\mathrm{s}_\varphi^2\mathrm{s}_\vartheta^2 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathrm{A}\,\mathrm{s}_\varphi\,\mathrm{c}_\varphi \\ -\mathrm{B}\,\mathrm{s}_\varphi\,\mathrm{c}_\varphi\,\mathrm{c}_\vartheta^2 \\ -\mathrm{C}\,\mathrm{s}_\varphi\,\mathrm{c}_\varphi\,\mathrm{s}_\vartheta^2 \end{matrix} & (\mathrm{C}-\mathrm{B})\mathrm{s}_\varphi\,\mathrm{c}_\vartheta\,\mathrm{s}_\vartheta \\ \underline{\quad\quad\quad\quad} & \begin{matrix} \mathrm{A}\,\mathrm{s}_\varphi^2 \\ +\mathrm{B}\,\mathrm{c}_\varphi^2\mathrm{c}_\vartheta^2 \\ +\mathrm{C}\,\mathrm{c}_\varphi^2\mathrm{s}_\vartheta^2 \end{matrix} & (\mathrm{B}-\mathrm{C})\mathrm{c}_\varphi\,\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\vartheta \\ \underline{\quad\quad\quad\quad} & \underline{\quad\quad\quad\quad} & \mathrm{B}\,\mathrm{s}_\varphi^2 + \mathrm{C}\,\mathrm{c}_\vartheta^2 \end{bmatrix}$$

Bindungen

Aufgabe 1



Der Massenpunkt P_1 des ebenen Pendels kann sich auf einem Kreis mit dem Radius L in der e_2-e_3-Ebene bewegen. Als Koordinaten des freien Punktes werden $\mathbf{x} = [r_{11}, r_{12}, r_{13}]$ gewählt.

a) Wie lauten die Zwangsbedingungen für den Massenpunkt?

- ☐ $\varphi_1 = r_{13} = 0\,,\qquad \varphi_2 = r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 - L^2 = 0$
- ☐ $\varphi_1 = r_{11}^2 + r_{12}^2 - 2L^2 = 0\,,\qquad \varphi_2 = r_{13}^2 - L^2 = 0$
- ☐ $\varphi_1 = r_{12}\, r_{12}\, r_{13} - L = 0$
- ☐ $\varphi_1 = r_{12}^2 + r_{13}^2 - L^2 = 0\,,\qquad \varphi_2 = r_{11} = 0$

b) Welche Größen eignen sich als verallgemeinerte Koordinaten?

☐ r_{11} ☐ r_{12} ☐ r_{13} ☐ α

c) Wie lauten die Zwangsbedingungen in expliziter Form?

- ☐ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ \pm\sqrt{L^2 - r_{11}^2} \\ 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2\cos\alpha \\ 2\sin\alpha \\ 1 \end{bmatrix} L$
- ☐ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{L^2 - r_{13}^2} \\ r_{13} \end{bmatrix}$
- ☐ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix} L$

Aufgabe 2

Klassifizieren Sie die folgenden Zwangsbedingungen. **Beachte**: Ω und L sind konstant, die Zeit wird durch t beschrieben und alle anderen Größen sind implizit zeitabhängig.

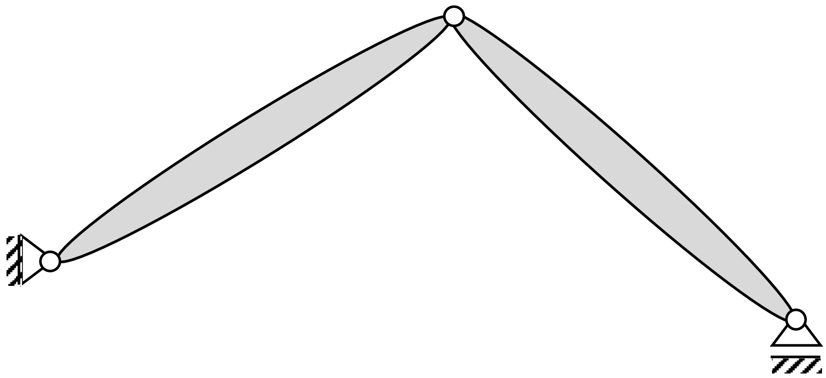
	geometrisch	kinematisch	holonom	nichtholonom	skleronom	rheonom
$r_{12}^2 + r_{13}^2 - L^2 = 0$						
$\alpha - \Omega t = 0$						
$\dot\alpha = \Omega$						
$\dot x \sin\alpha - \dot y \cos\beta = 0$						
$\dot\alpha \cos\alpha - \dot\beta \sin\beta = 0$						

Lagerung holonomer Mehrkörpersysteme

Aufgabe 1

Klassifizieren Sie die Lagerungen der folgenden **ebenen** Mehrkörpersysteme:

a)



$f^u =$

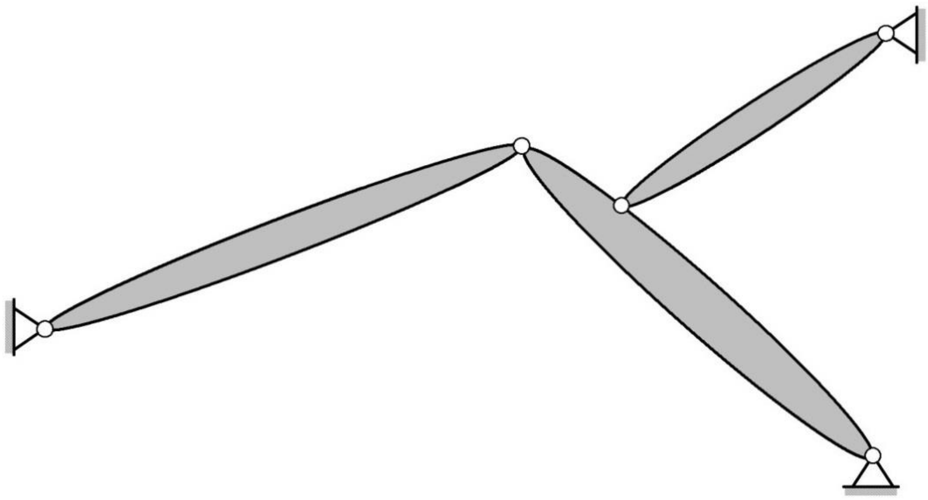
$n^c =$

$f =$

$n =$

$r =$

b)



$f^u =$

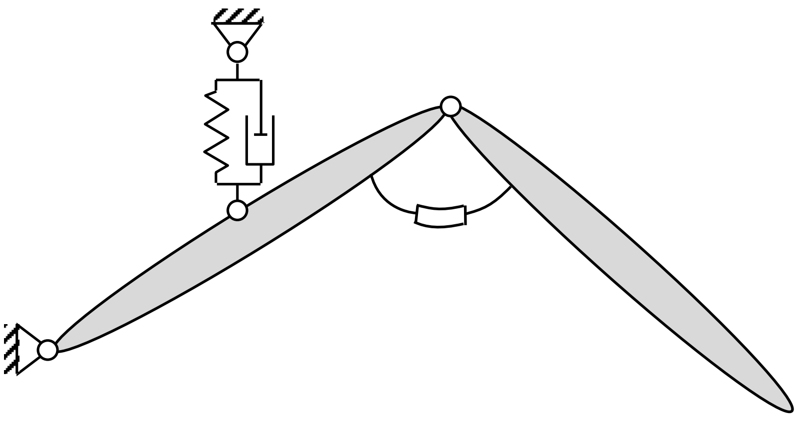
$n^c =$

$f =$

$n =$

$r =$

d)



$f^u =$

$n^c =$

$f =$

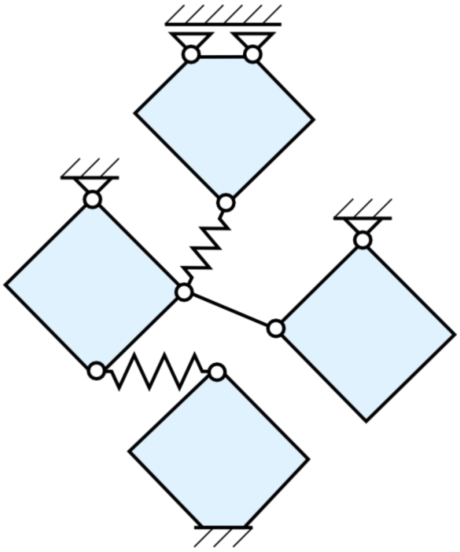
$n =$

$r =$

Aufgabe 2

Geben Sie für folgende Systeme jeweils die Zahl der Freiheitsgrade und geeignete verallgemeinerte Koordinaten an. Tragen Sie die Koordinaten in die Zeichnung ein und benennen Sie diese.

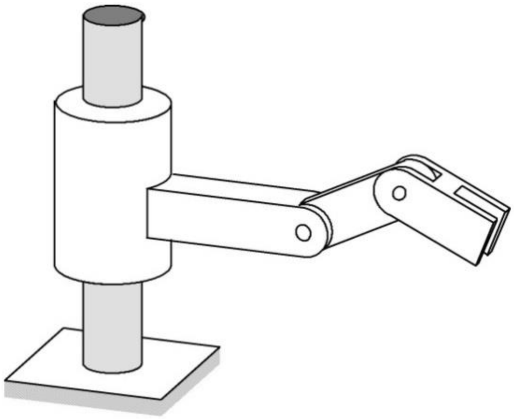
a) MKS des ITM-Logos



f = ___

$\mathbf{y} = \big[\quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad \big]$

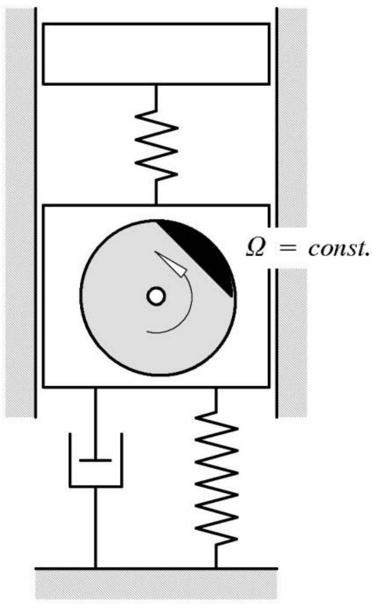
b) Räumlicher Manipulator



f = ___

$\mathbf{y} = \big[\quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad \big]$

b) Unwuchterregte Maschine mit Schwingungstilger



f = ___

$\mathbf{y} = \big[\quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad \big]$

Kinematik gebundener Mehrkörpersysteme

Aufgabe 1

Benennen Sie die Kinematikbeschreibungen eines starren Körpers i, der in einem holonomen Mehrkörpersystemen gebunden ist.

Lage:

$$\mathbf{r}_i := \mathbf{r}_i(\mathbf{y}, t) \qquad \mathbf{S}_i := \mathbf{S}_i(\mathbf{y}, t)$$

Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}_i := \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

1. $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i := \dot{\mathbf{S}}_i \cdot \mathbf{S}_i^T \xrightarrow{Rösselsprung} \boldsymbol{\omega}_i$
2. $\boldsymbol{\omega}_i$ aus der Anschauung

$$\Rightarrow \mathbf{v}_i = \mathbf{J}_{Ti} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_i \qquad \boldsymbol{\omega}_i := \mathbf{J}_{Ri} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i$$

Beschleunigung:

$$\mathbf{a}_i := \mathbf{J}_{Ti} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\dot{\mathbf{J}}_{Ti} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_i} \qquad \boldsymbol{\alpha}_i := \mathbf{J}_{Ri} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\dot{\mathbf{J}}_{Ri} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}_i = \mathbf{J}_{Ti} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{a}}_i \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{J}_{Ri} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i$$

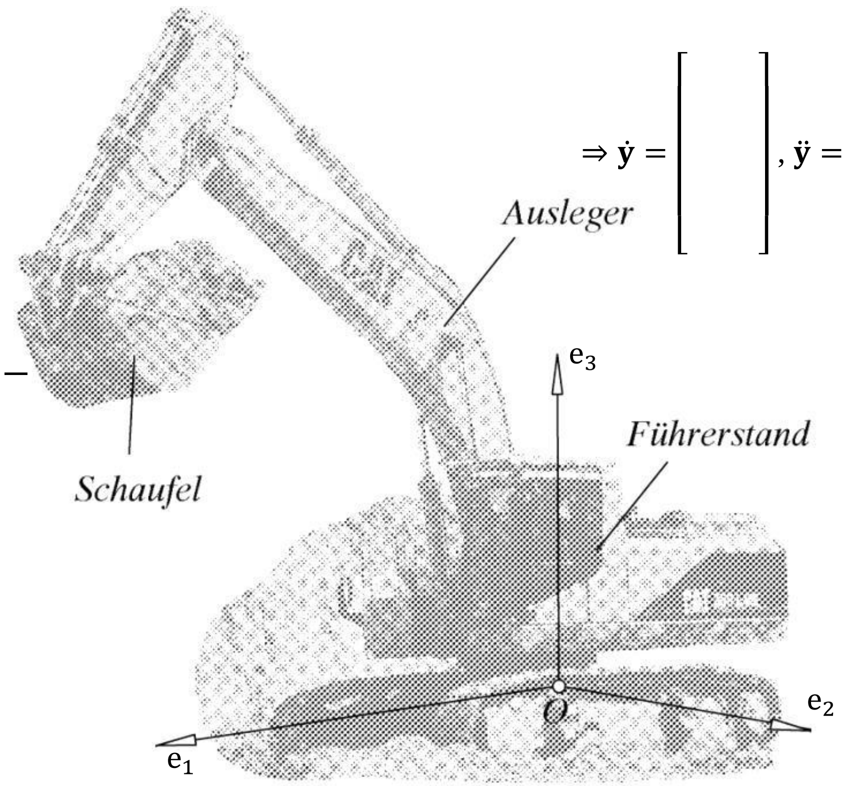
Aufgabe 2

Ein stehender Schaufelbagger mit elastischen Hydraulikzylindern soll als starres Mehrkörpersystems modelliert werden.

a) Bestimmen Sie den Freiheitsgrad, geben Sie einen Satz verallgemeinerter Koordinaten an und zeichnen Sie diese in die Zeichnung ein.

$f =$ ___ $\qquad \mathbf{y} = \left[\quad \right]$

$\Rightarrow \dot{\mathbf{y}} = \left[\quad \right], \ddot{\mathbf{y}} = \left[\quad \right]$



b) Beschreiben Sie aus der Anschauung die Winkelgeschwindigkeiten folgender Körper im Inertialsystem $\mathrm{K}\{0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$ und bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen der Rotationen durch Koeffizienten-Vergleich.

Führerstand:

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \overset{!}{=} \mathbf{J}_\mathrm{RF} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{F} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} + \mathbf{0}$$

Ausleger:

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & 0 \\ & & \_\_ \\ & & 0 \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_ \\ 0 & 0 & 1 \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_\mathrm{RA}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{A}}$$

Schaufel:

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} + \_\_ \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \end{bmatrix} + \_\_\_\_\_\_ \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \end{bmatrix} + \_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} + \_\_\_ \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_\mathrm{RS}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{S}$$

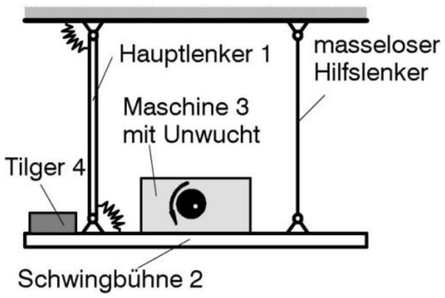
c) Wie ändern sich die Winkelgeschwindigkeiten, falls die Drehrichtung des Führerstands und der Winkel zwischen Ausleger 1&2 entgegengesetzt angenommen wären?

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_\_ \\ 0 \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_\_ \\ 0 \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & 0 \\ & & \_\_ \\ & & 0 \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_ \\ 0 & 0 & 1 \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{S} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

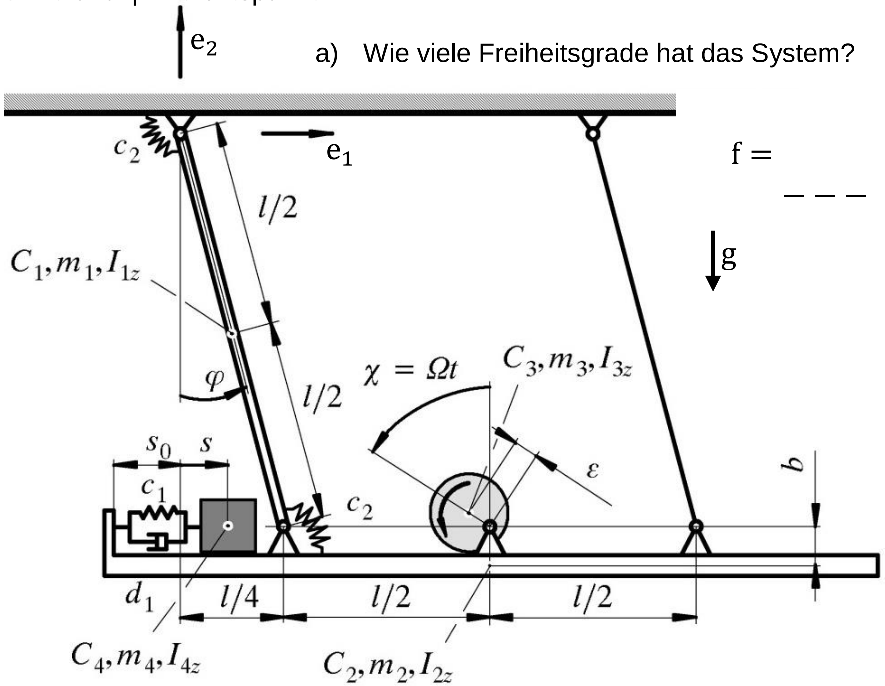
Aufgabe 3



Eine Schwingbühne ist über einen Hauptlenker an der Decke befestigt und mit einem masselosen Hilfslenker gegen Kippen gesichert. Die Schwingbühne kann ebene Bewegungen ausführen. Auf der Schwingbühne befinden sich eine Maschine mit umlaufender Unwucht ($\Omega = \mathrm{const.}$) und ein Schwingungstilger. Die Schwingbühne wird als Mehrkörpersystem modelliert. Die Federn sind für $s = 0$ und $\varphi = 0$ entspannt.

a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

f = ___



b) Welcher Lagevektor eignet sich zur Beschreibung des Mehrkörper systems?

- ○ $\mathbf{y} = [\varphi]$
- ○ $\mathbf{y} = [\varphi \;\; s]$
- ○ $\mathbf{y} = [\varphi \;\; \chi]$
- ○ $\mathbf{y} = [\varphi \;\; \chi \;\; s]$

c) Geben Sie die Ortsvektoren zu den Massenmittelpunkten, die Drehmatrizen, die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen für die einzelnen Körper an:

Hauptlenker:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T1}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_1$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{J}_{T1} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_1}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \overset{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R1}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_1}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{J}_{R1} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_1}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1}$$

Schwingbühne:

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T2}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{J}_{T2} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_2}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} -l\,\dot{\varphi}^2 \sin\varphi \\ l\,\dot{\varphi}^2 \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \overset{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R2}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_2}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{J}_{R2} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_2}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_2}$$

Maschine mit Unwucht:

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T3}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}_3}$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{J}_{T3} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{a}}_3 = \begin{bmatrix} -l\,\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + \varepsilon\,\Omega^2 \sin(\Omega t) \\ l\,\dot{\varphi}^2 \cos\varphi - \varepsilon\,\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \overset{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R3}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_3}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \_\_\_$$

Tilger:

$$\mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T4}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}_4}$$

$$\mathbf{a}_4 = \mathbf{J}_{T4} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_4}_{\bar{\mathbf{a}}_4 = \begin{bmatrix} -l\,\dot{\varphi}^2 \sin\varphi \\ l\,\dot{\varphi}^2 \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_4 = \_\_\_ \qquad \bar{\boldsymbol{\omega}}_4 = \_\_\_ \qquad \boldsymbol{\alpha}_4 = \_\_\_ \qquad \bar{\boldsymbol{\alpha}}_4 = \_\_\_$$

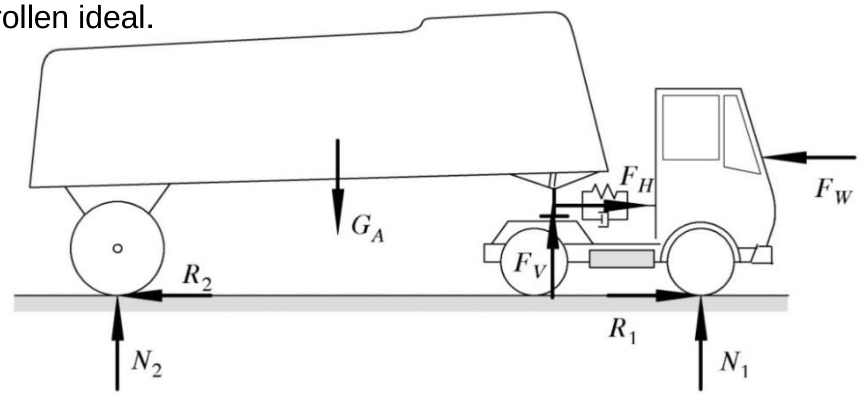
Klassifizierung von Kräften

Aufgabe 1

a) Benennen Sie:

$$f_i = \overbrace{f_i^{\mathbf{i}} + f_i^{\mathbf{a}}} = \overbrace{f_i^{\mathbf{e}} + f_i^{\mathbf{r}}}$$

b) Eine Zugmaschine zieht einen Auflieger mit blockierten Hinterrädern. Die Vorderräder der Zugmaschine rollen ideal.



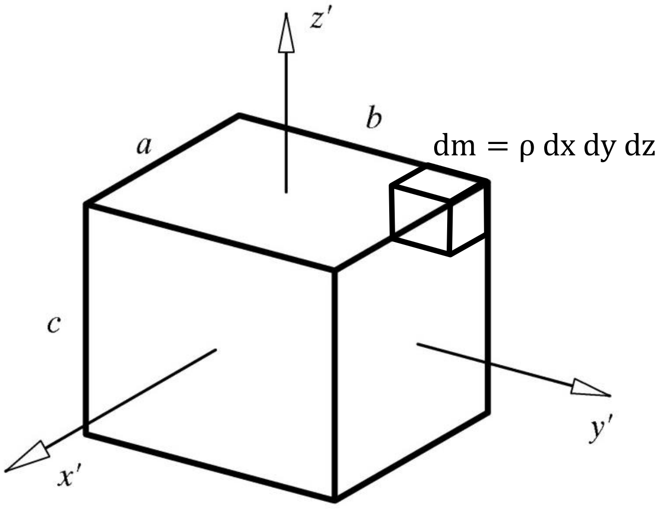
Wie werden die eingetragenen Kräfte bezeichnet?

	äußere Kraft	innere Kraft	eingeprägte Kraft	Reaktionskraft	ideale Kraft	nichtideale Kraft	P–Kraft	PD–Kraft	PID–Kraft
Aufliegergewicht G_A									
Windwiderstand F_W									
vertikale Aufliegerkraft F_V									
horizontale Aufliegerkraft F_H									
Normalkraft N_1									
Haftreibungskraft R_1									
Normalkraft N_2									
Gleitreibungskraft R_2									

Massengeometrie eines Quaders

Aufgabe 1

Ermitteln Sie den Trägheitstensor für einen homogenen Quader (Masse m, Kantenlängen a, b und c) im körperfesten Koordinatensystem.



a) Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment I'_{xx} durch Integration (verwenden Sie dabei die Dichte ρ als Hilfsgröße).

$$I'_{xx} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} = \rho \int_{\_\_\_\_}^{\_\_\_\_} \int_{\_\_\_\_}^{\_\_\_\_} \int_{\_\_\_\_}^{\_\_\_\_} \underline{\qquad\qquad\qquad} \, dx\, dy\, dz$$

$$= \rho \int \int \underline{\qquad\qquad\qquad} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy\, dz = \rho \int \int \underline{\qquad\qquad\qquad} \, dy\, dz$$

$$= \rho \int \underline{\qquad\qquad\qquad} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz = \rho \int \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \, dz$$

$$= \rho \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \Big|_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \rho \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

b) Bestimmen Sie das Massendeviationsmoment I'_{xy} durch Integration.

$$I'_{xy} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} = -\rho \int_{\_\_\_}^{\_\_\_} \int_{\_\_\_}^{\_\_\_} \int_{\_\_\_}^{\_\_\_} \underline{\qquad\qquad\qquad} \, dx\, dy\, dz$$

$$= -\rho \int\int \frac{}{\_\_\_\_\_\_\_\_} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{dy\,dz} = -\rho \int\int \frac{}{\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \mathrm{dy\,dz}$$

$$\Rightarrow \; \mathrm{I}'_{\mathrm{xy}} = \frac{}{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

c) Was versteht man unter einem "Hauptachsensystem"? Ergänzen Sie den Lückentext.

Für jeden Körper gibt es ________ _____________, bezüglich derer das Trägheitsmoment maximal bzw. minimal ist. Diese Achsen stehen __________________ zueinander und bilden mit einer dazu __________________ dritten Achse die ______________________. Das von diesen Achsen aufgespannte Koordinatensystem wird als _______________________ bezeichnet. In diesem Koordinatensystem ist der Trägheitstensor ______________.

d) Geben Sie den vollständigen Trägheitstensor an.

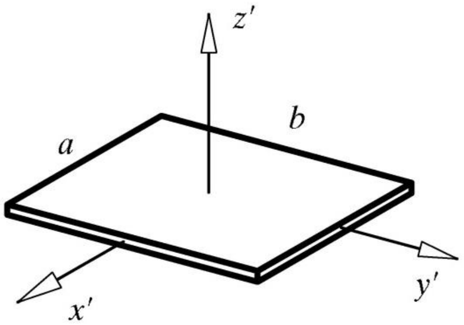
$$\mathbf{I}' = \frac{}{\_\_\_\_} \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2

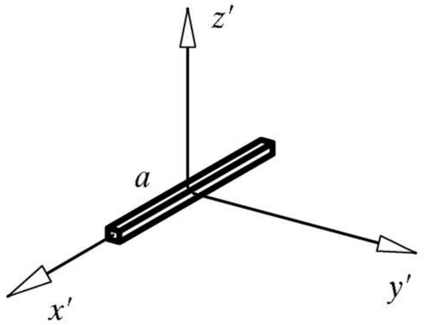
Wie lautet der Trägheitstensor

a) einer Platte (Masse m) ?

$$\mathbf{I}' = \frac{}{\_\_\_\_} \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$



b) eines Stabes (Masse m) ?

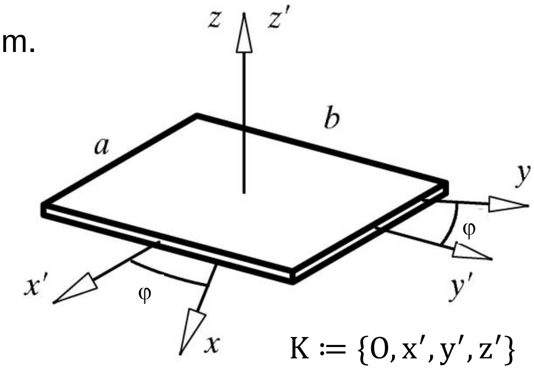


$$\mathbf{I}' = \frac{}{\_\_\_\_}\begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Trägheitstensor ${}_{\mathrm{I}}\mathbf{I}$ im Inertialsystem.

a) Wie lautet die Drehmatrix?



$\mathrm{K} := \{0, x', y', z'\}$
$\mathrm{I} := \{0, x, y, z\}$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

b) Führen Sie die Transformation des körperfesten Trägheitstensors $\mathbf{I}'_{\mathrm{K}}$ ins raumfeste Koordinatensystem durch.

$$\mathbf{I}_{\mathrm{I}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

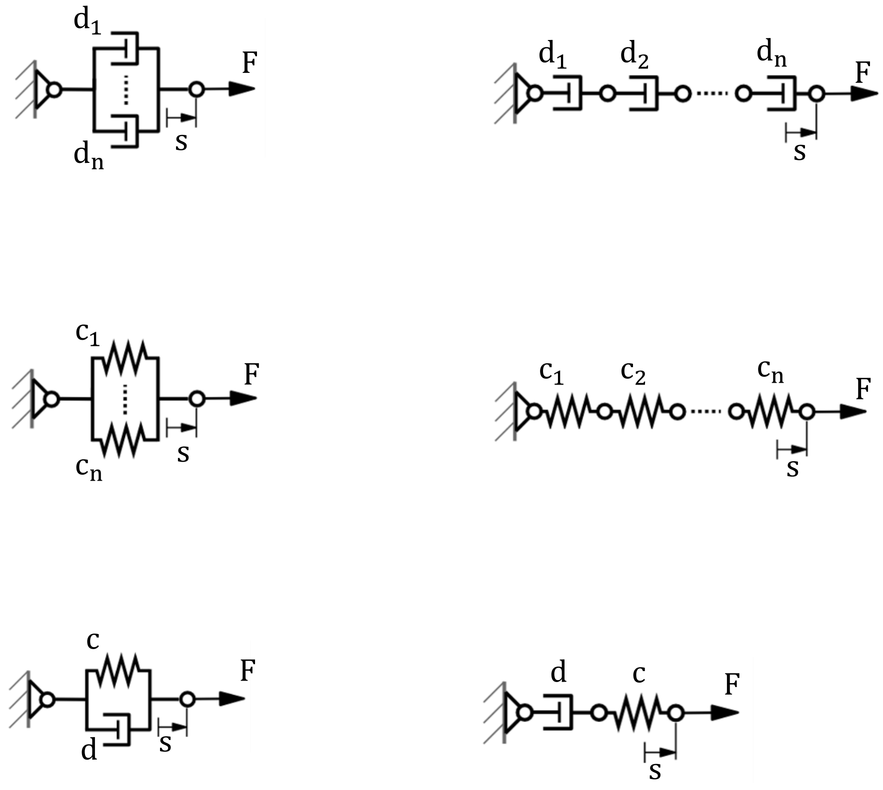
$$= \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \frac{}{\_\_\_} \underbrace{\begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{}{\_\_\_}\begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & (a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

Kinetik gebundener Mehrkörpersysteme

Aufgabe 1

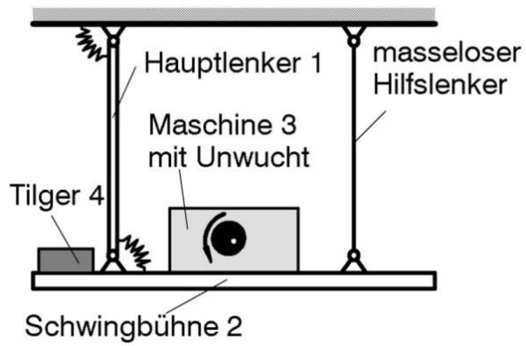
Wie berechnet sich die Gesamtkraft F in kombinierten Feder-Dämpfer-Elementen, wenn alle Federn für $s = 0$ ungespannt sind?



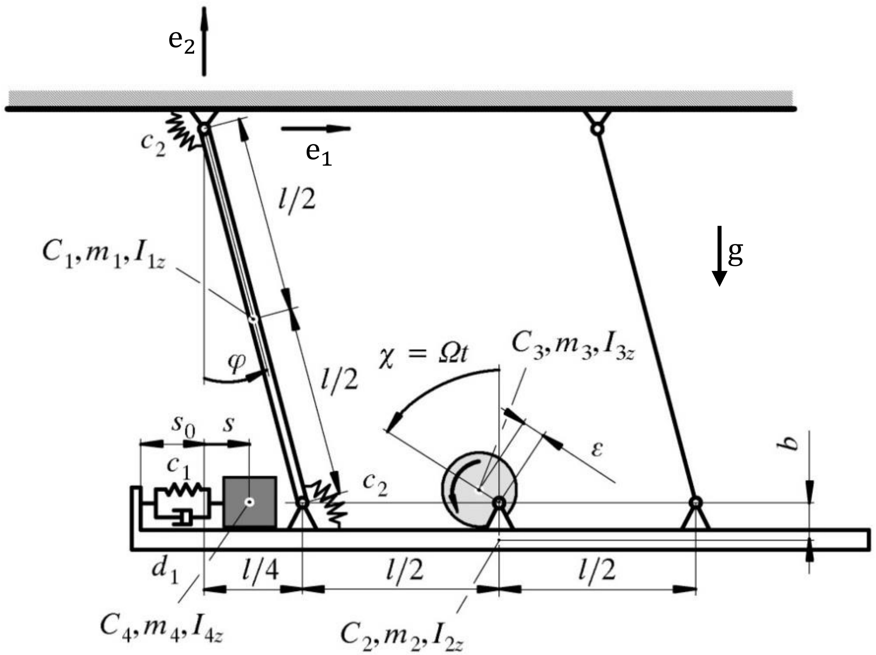
Aufgabe 2

Die Schwingbühne aus Arbeitsblatt A7, Aufgabe 3, soll hinsichtlich ihrer Kinetik untersucht werden.

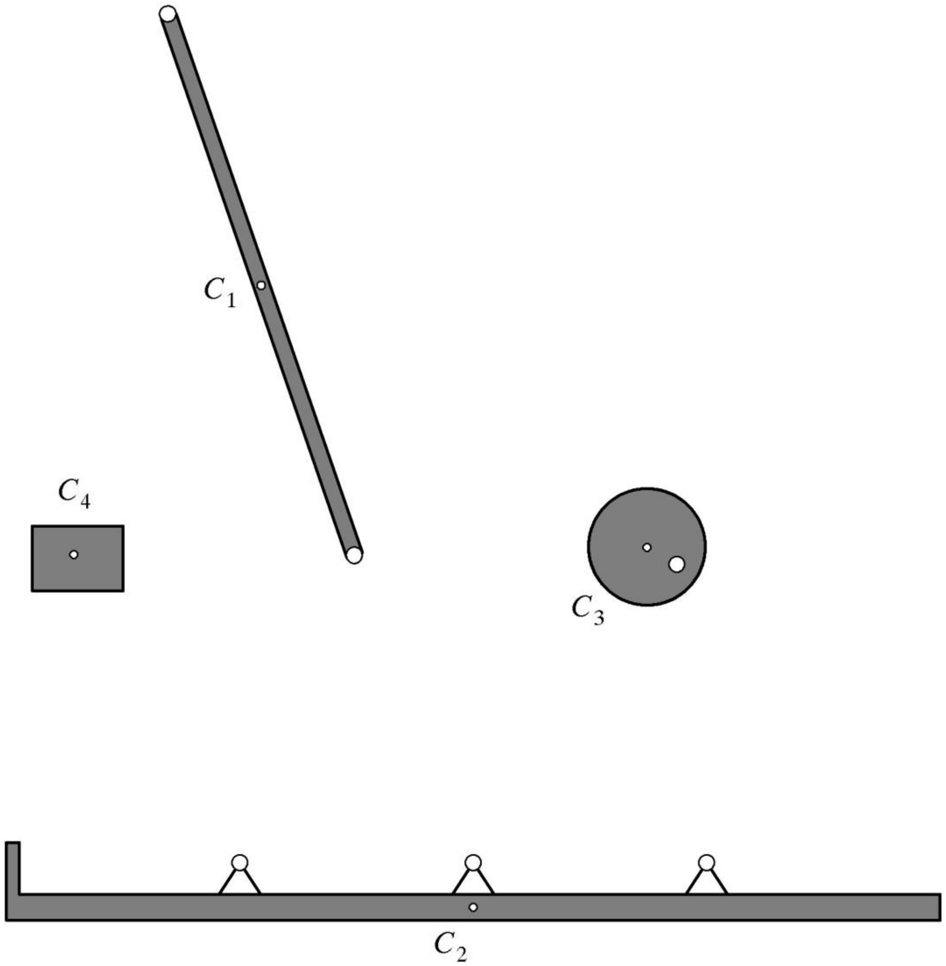
$$\mathbf{y} = [\varphi \quad s]$$



Die Abbildung auf ein Mehrkörpersystem ist unten dargestellt (Die Federn sind für $s = 0$ und $\varphi = 0$ entspannt).



a) Tragen Sie in das freigeschnittene System alle Kräfte und Momente ein und benennen Sie diese (Führen Sie eine ebene Betrachtung durch).



b) Formulieren Sie die Gesetze für die eingeprägten Kräfte und Momente:

_ _

_ _

_ _

_ _

c) Wie lauten die Impuls− und Drallsätze für die freigeschnittenen Körper?

○ $m_i\,\mathbf{J}_{Ti}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + m_i\bar{\mathbf{a}}_i = \mathbf{f}_i^e$
$\mathbf{I}_i\cdot\mathbf{J}_{Ri}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{I}_i\cdot\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i\cdot\mathbf{I}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{l}_i^e$

○ $m_i\,\mathbf{J}_{Ti}\cdot\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}_i^e + \mathbf{f}_i^r$
$\mathbf{I}_i\cdot\mathbf{J}_{Ri}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i\cdot\mathbf{I}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{l}_i^e + \mathbf{l}_i^r$

○ $m_i\,\mathbf{J}_{Ti}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + m_i\bar{\mathbf{a}}_i = \mathbf{f}_i^e + \mathbf{f}_i^r$
$\mathbf{I}_i\cdot\mathbf{J}_{Ri}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{I}_i\cdot\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i\cdot\mathbf{I}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{l}_i^e + \mathbf{l}_i^r$

d) Geben Sie die resultierenden Kraftwinder der eingeprägten Kräfte auf die vier Körper bezüglich ihres Schwerpunkts an:

$\mathbf{f}_1^e = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{l}_1^e = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$

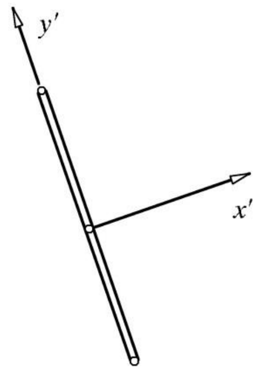
$\mathbf{f}_2^e = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{l}_2^e = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$

$\mathbf{f}_3^e = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{l}_3^e = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$

$\mathbf{f}_4^e = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$

e) Wie lautet der Trägheitstensor des Hauptlenkers

im körperfesten Koordinatensystem?



○ $\mathbf{I}_1' = \begin{bmatrix} I_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ○ $\mathbf{I}_1' = \begin{bmatrix} I_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{1z} \end{bmatrix}$

○ $\mathbf{I}_1' = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & I_{1z} \end{bmatrix}$

im Inertialsystem?

○ $\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$ ○ $\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & I_{1z} \end{bmatrix}$ ○ $\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_{1z} \end{bmatrix}$

f) Formulieren Sie den Impulssatz für den Hauptlenker.
Hinweis: Verwenden Sie die kinematischen Beziehungen aus Arbeitsblatt A7, Aufgabe 3.

Hauptlenker:

$$\left[\qquad\qquad\right]\cdot\ddot{\mathbf{y}}+\left[\qquad\qquad\right]=\left[\qquad\qquad\right]+\mathbf{f}_1^r$$

g) Formulieren Sie den Drallsatz für den Hauptlenker.
Hinweis: Verwenden Sie die kinematischen Beziehungen aus Arbeitsblatt A7, Aufgabe 3.

Hauptlenker:

$$\left[\qquad\qquad\right]\cdot\left[\qquad\qquad\right]\cdot\ddot{\mathbf{y}}+\left[\qquad\qquad\right]\cdot\left[\qquad\right]$$
$$+\left[\qquad\qquad\right]\cdot\left[\qquad\qquad\right]\cdot\left[\qquad\right]=\left[\qquad\qquad\right]+\mathbf{l}_1^r$$

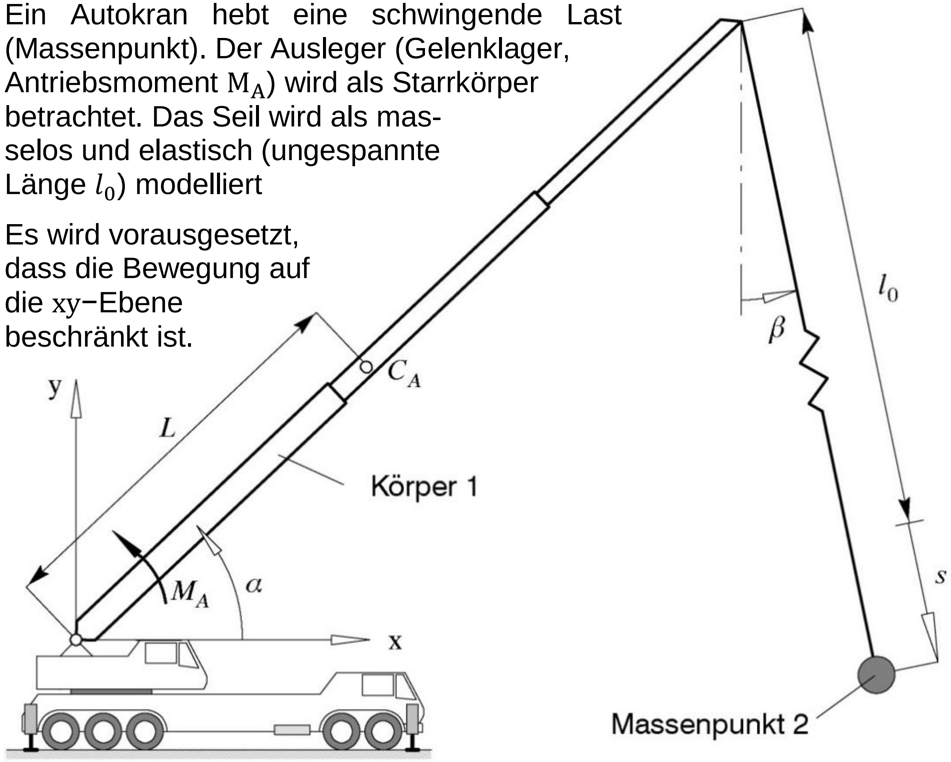
oder

$$\left[\qquad\qquad\right]\cdot\ddot{\mathbf{y}}+\left[\qquad\qquad\right]=\left[\qquad\qquad\right]+\mathbf{l}_1^r$$

Aufgabe 3

Ein Autokran hebt eine schwingende Last (Massenpunkt). Der Ausleger (Gelenklager, Antriebsmoment M_A) wird als Starrkörper betrachtet. Das Seil wird als masselos und elastisch (ungespannte Länge l_0) modelliert

Es wird vorausgesetzt, dass die Bewegung auf die xy−Ebene beschränkt ist.



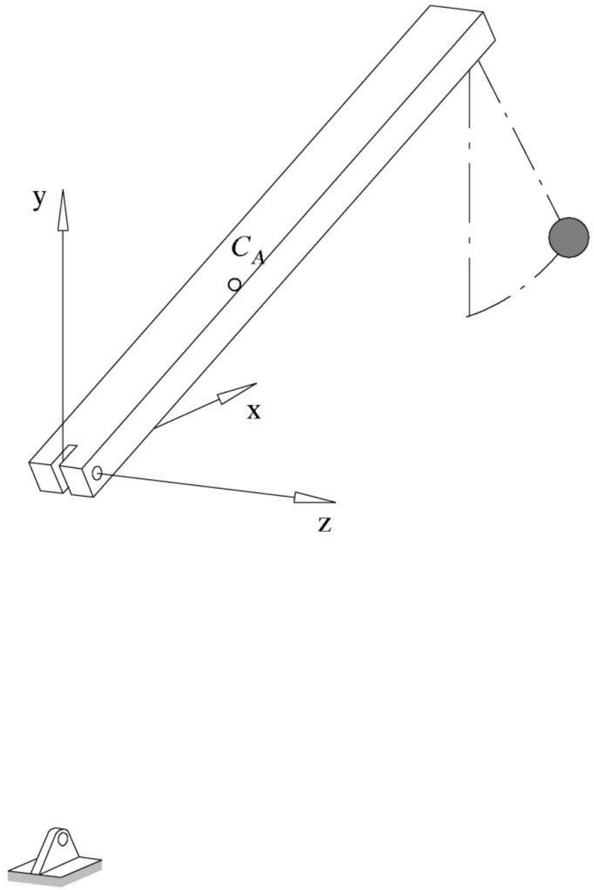
a) Wie groß ist die Zahl der geometrischen Bindungen bei der gewählten Modellierung? (Führen Sie eine räumliche Betrachtung durch!)

Summe der Freiheitsgrade des freien Kranauslegers und Massenpunkts: $f^u =$ __________

Zahl der Freiheitsgrade des gebundenen Mehrkörpersystems: $f =$ __________

Zahl der geometrischen Bindungen: $n =$ __________

b) Tragen Sie die verallgemeinerten Zwangskräfte und Zwangsmomente auf den Kranausleger, das Lager und die Last ein, und bezeichnen Sie diese.



c) Geben Sie den Vektor der verallgemeinerten Zwangskräfte/momente an:

$$\mathbf{g} = \Big[\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\ \Big]$$

d) Wie lauten die Reaktionskraftvektoren und die zugehörigen Verteilungsmatrizen?

Ausleger:

$$\mathbf{f}_1^r = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix} \overset{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_{T1}} \cdot \mathbf{g}$$

Last:

$$\mathbf{f}_2^r = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix} \overset{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_{T2}} \cdot \mathbf{g}$$

e) Bestimmen Sie den Reaktionsmomentenvektor des Auslegers zuerst aus der Anschauung (1) und anschließend formal, mittels des Kreuzproduktes (2).

(1) aus der Anschauung:

$$\mathbf{l}_1^r = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

(2) formal mittels Kreuzprodukt

$$\mathbf{l}_1^r = \sum_i \mathbf{l}_{1i}^r + \sum_j \mathbf{r}_{Cj} \times \mathbf{f}_{1j}^r$$

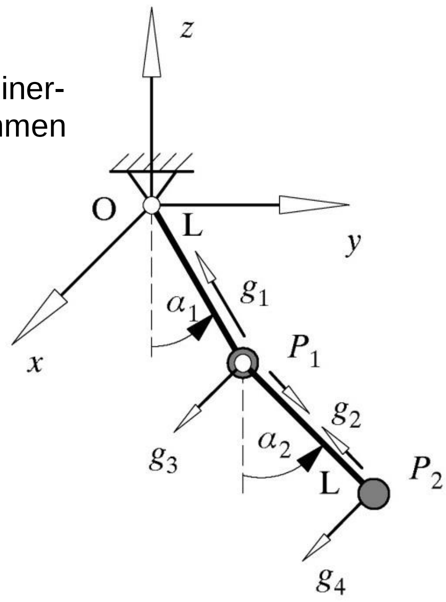
$$\mathbf{l}_1^r = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

f) Wie lautet die zugehörige Verteilungsmatrix $\mathbf{F}_{R1}$?

$$\mathbf{l}_1^r \overset{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_{R1}} \cdot \mathbf{g}$$

Virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte am Doppelpendel

Aufgabe 1



a) Die virtuelle Verschiebung eines Körpers mit den verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y}$ und dem Ortsvektor $\mathbf{r}_i(\mathbf{y})$ lässt sich bestimmen mit

$$\delta\mathbf{r}_i = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\,.$$

b) Für ein Doppelpendel findet man mit dem Lagevektor $\mathbf{y} = [\alpha_1 \quad \alpha_2]$ und den Ortsvektoren und Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \mathbf{J}_{T1} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \mathbf{J}_{T2} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

für die virtuellen Verschiebungen die Beziehungen

$$\delta\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad \delta\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

c) Mit den verallgemeinerten Zwangskräften und Zwangsmomenten $\mathbf{g} = [g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4]$ ergeben sich die Reaktionskräfte und Verteilungsmatrizen zu

$$\mathbf{f}_1^r = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \mathbf{g}$$

$$\mathbf{f}_2^r = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \mathbf{g}.$$

d) Die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte $\mathbf{f}_i^r$ ist damit

$$\delta W^r = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

e) Das Verschwinden der virtuellen Arbeit $\delta W^r = \delta \mathbf{y}^{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{J}}^T \cdot \bar{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{g}$ der Reaktionskräfte lässt sich auch mit der Orthogonalitätsbeziehung

$$\bar{\mathbf{J}}^T \cdot \bar{\mathbf{Q}} = \underline{\qquad} \left[\begin{array}{cc|cc} \qquad\qquad & & & \qquad\qquad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & 0 & 0 \\ \cos\alpha_1 & -\cos\alpha_2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\sin\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

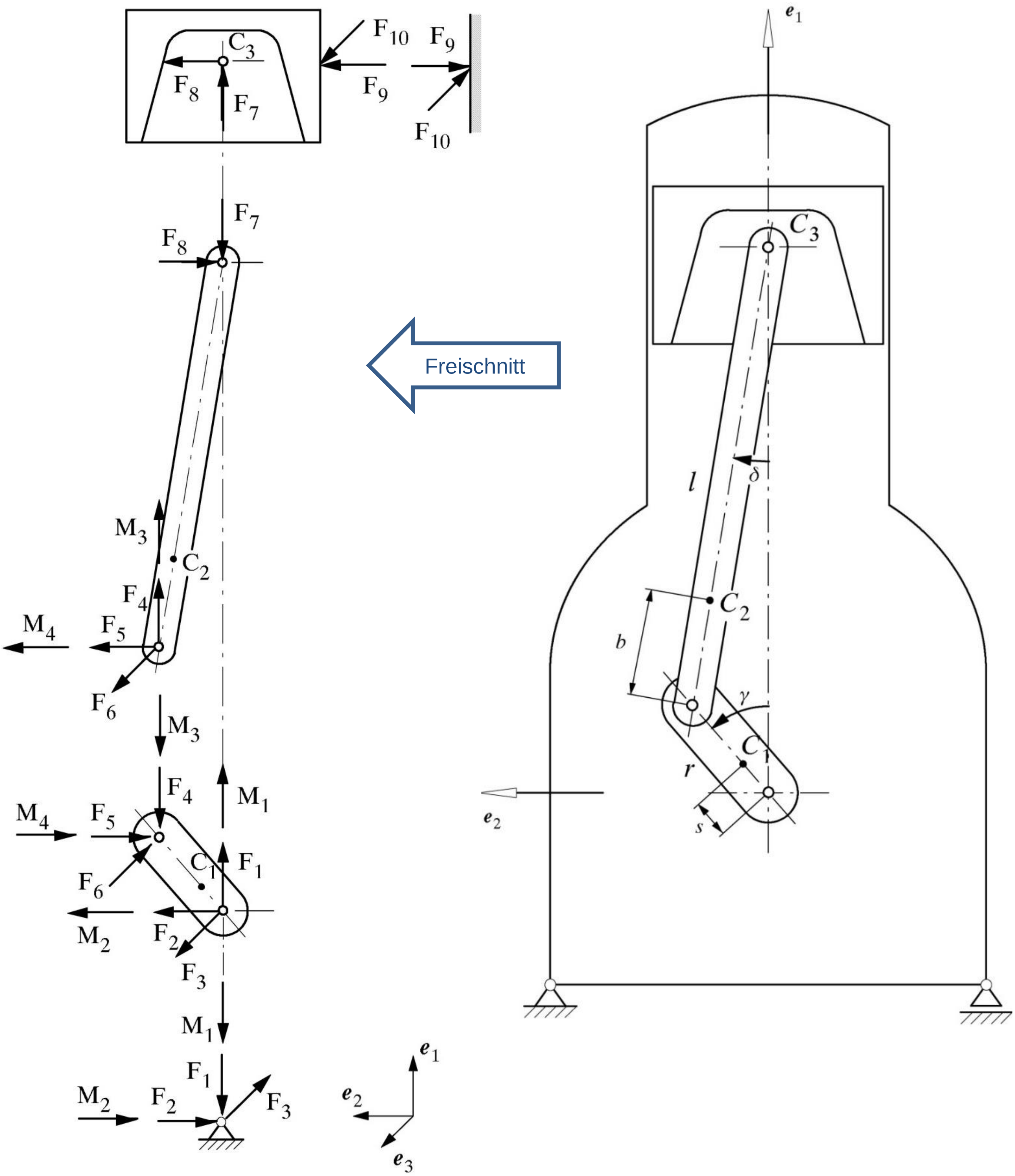
prüfen.

Lagerkräfte am Einzylindermotor

Aufgabe 1

Das Modell eines Einzylindermotors (rechte Abbildung) wurde mit folgenden verallgemeinerten Zwangskräften und Zwangsmomenten freigeschnitten (linke Abbildung), wobei der Kolben als Punktmasse modelliert wird.

$$\mathbf{g} = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6 \quad F_7 \quad F_8 \quad F_9 \quad F_{10} \quad M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad M_4\,]$$



a) Wie lauten die Zwangskräfte und Zwangsmomente bezüglich der Schwerpunkte?

$$\mathbf{f}_1^r = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2^r = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_3^r = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{l}_1^r = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ -F_2\, s \cos\gamma + F_1\, s\, \sin\gamma - F_5 (r-s) \cos\gamma + F_4 (r-s) \sin\gamma \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{l}_2^r = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ -F_5\, b \cos\delta - F_4\, b \sin\delta - F_8 (l-b) \cos\delta - F_7 (l-b) \sin\delta \end{bmatrix}$$

b) Wie lautet die Verteilungs-Matrix $\bar{\mathbf{Q}}$ der Reaktionskräfte und Reaktionsmomente mit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^r \\ \mathbf{f}_2^r \\ \mathbf{f}_3^r \\ \mathbf{l}_1^r \\ \mathbf{l}_2^r \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{g} \text{ ?}$$

$$
\underline{Q} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc|cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & F_{10} & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccc|cccc}
 & \circ & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & & \circ & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & & \circ & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\hline
\circ & \circ & \circ & & \circ & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & & \circ & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\hline
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\hline
\circ & \circ & & \circ & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ & & \circ & & \circ \\
\circ & \circ & & \circ & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & \circ & \\
 & & \circ & & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\
\hline
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & \circ \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \\
\circ & \circ & \circ & & & \circ & & & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ
\end{array}\right]
\end{array}
$$

c) Überprüfen Sie das Ergebnis mit der Orthogonalitätsbeziehung $\bar{\mathbf{J}}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$.

Hinweis: Die globale Jacobi-Matrix ergibt sich mit der verallg. Koordinate $\mathbf{y} = [\,\gamma\,]$ als

$$\bar{\mathbf{J}}^{\mathrm{T}} = [\; -s\sin\gamma \quad s\cos\gamma \quad 0 \quad | \quad -r\sin\gamma - b\delta'\sin\delta \quad r\cos\gamma - b\delta'\cos\delta \quad 0 \quad | \ldots$$
$$-r\sin\gamma - l\,\delta'\sin\delta \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad 0 \quad 0 \quad -\delta']^{\mathrm{T}}$$

d) Ermitteln Sie die globale Massen-Blockdiagonalmatrix $\bar{\bar{\mathbf{M}}}$

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}} =$$

e) Durch Links-Multiplikation der Newton−Euler−Gleichungen mit $\bar{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1}$ ergeben sich die Reaktionsgleichungen, mit dessen Hilfe sich die Lagerkräfte und −momente ermitteln lassen. Benennen Sie die Komponenten der Gleichung.

$$\hat{\mathbf{k}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) + \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{g}$$

Nichtlineare und Lineare Bewegungsgleichungen holonomer Mehrkörpersysteme

Aufgabe 1

Benennen Sie die folgenden Gleichungen, Matrizen und Vektoren. Erklären Sie die Zusammenhänge und die angewandten Prinzipe der Mechanik.

$$\boxed{\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{g}}$$

$$\bar{\mathbf{Q}}^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \bar{\mathbf{J}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \overbrace{\bar{\mathbf{Q}}^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{q}}^c}^{\hat{\mathbf{k}}} = \overbrace{\bar{\mathbf{Q}}^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{q}}^e}^{\hat{\mathbf{q}}} + \overbrace{\bar{\mathbf{Q}}^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Q}}}^{\hat{\mathbf{N}}} \cdot \mathbf{g}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \bar{\mathbf{J}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{q}}^c = \bar{\mathbf{q}}^e + \bar{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{g}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} m_1\mathbf{E} & \mathbf{0} & & & \\ \mathbf{0} & m_2\mathbf{E} & & & \\ & & \ldots & & \\ & & & \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & \ldots \end{bmatrix}}^{\bar{\bar{\mathbf{M}}}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{T1} \\ \mathbf{J}_{T2} \\ \ldots \\ \mathbf{J}_{R1} \\ \ldots \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{J}}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \overbrace{\begin{bmatrix} m_1\bar{\mathbf{a}}_1 \\ m_2\bar{\mathbf{a}}_2 \\ \ldots \\ \mathbf{I}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \cdot \mathbf{I}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 \\ \ldots \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{q}}^c} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{f}_2^e \\ \ldots \\ \mathbf{l}_1^e \\ \ldots \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{q}}^e} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T1} \\ \mathbf{F}_{T2} \\ \ldots \\ \mathbf{F}_{R1} \\ \ldots \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{g}$$

$$\underbrace{\bar{\mathbf{J}}^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \bar{\mathbf{J}}}_{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\bar{\mathbf{J}}^T \cdot \bar{\mathbf{q}}^c}_{\mathbf{k}} = \underbrace{\bar{\mathbf{J}}^T \cdot \bar{\mathbf{q}}^e}_{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{J}}^T \cdot \bar{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{g}$$

$$\boxed{\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k} = \mathbf{q}}$$

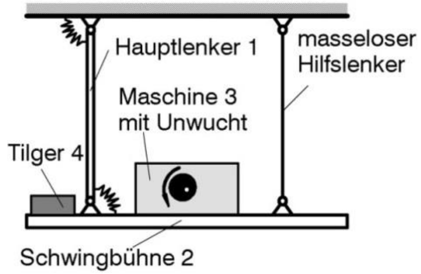
$$\underbrace{\mathbf{M}(\mathbf{y}_s, t)}_{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\bigg|_s - \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\bigg|_s \right)}_{\mathbf{P}} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}}\bigg|_s \cdot \ddot{\mathbf{y}}_s + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{y}}\bigg|_s - \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{y}}\bigg|_s \right)}_{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\eta} = \underbrace{\mathbf{q}(\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s, t) - \mathbf{k}(\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s, t) - \mathbf{M}(\mathbf{y}_s, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_s}_{\mathbf{h}}$$

$$\boxed{\mathbf{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}}$$

$$\boxed{\mathbf{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + (\overbrace{\mathbf{D}}^{\frac{1}{2}(\mathbf{P}+\mathbf{P}^T)} + \overbrace{\mathbf{G}}^{\frac{1}{2}(\mathbf{P}-\mathbf{P}^T)}) \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + (\overbrace{\mathbf{K}}^{\frac{1}{2}(\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^T)} + \overbrace{\mathbf{N}}^{\frac{1}{2}(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}^T)}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}}$$

Aufgabe 2

Die Bewegungsgleichungen der Schwingbühne aus den Arbeitsblättern A7 und A10 sollen im Folgenden aufgestellt werden.



a) Stellen Sie zunächst die Newton-Eulerschen Gleichungen auf.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \end{bmatrix}}_{\bar{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \bar{\mathbf{J}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{q}}^c} = \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{q}}^e} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^r \\ \hline \mathbf{f}_2^r \\ \hline \mathbf{f}_3^r \\ \hline \mathbf{f}_4^r \\ \hline \mathbf{l}_1^r \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{q}}^r}$$

b) Welchen Einfluss haben die Zwangskräfte $\bar{\mathbf{q}}^r$ des Systems auf die Bewegungsgleichungen? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

c) Wie lautet die transponierte globale Jacobi-Matrix?

$$\bar{\mathbf{J}}^{\mathrm{T}} = \left[\quad \right]$$

d) Ermitteln Sie die nichtlineare Bewegungsgleichung für $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 := m$

$$\left[\quad\right]\cdot\left[\quad\right]+\left[\quad\right]=\left[\quad\right]$$

Aufgabe 3

Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen aus Aufgabe 2 sollen nun für kleine Auslenkungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen um die Gleichgewichtslage $\mathbf{y}_s = [0 \quad 0]$, $\dot{\mathbf{y}}_s = [0 \quad 0]$, $\ddot{\mathbf{y}}_s = [0 \quad 0]$ linearisiert werden. Es gilt $\mathbf{y} = \mathbf{y}_s + \boldsymbol{\eta}$, wobei $\boldsymbol{\eta}$ der Vektor der linearen verallgemeinerten Koordinaten darstellt. Der Einfluss der Unwucht auf die lageabhängigen Kräfte soll vernachlässigbar werden ($\varepsilon \ll 1$).

Hinweis: Im Allgemeinen lautet die lineare Form der oben dargestellten Bewegungsgleichungen:

$$\underbrace{\mathbf{M}(\mathbf{y}_s,t)}_{\mathbf{M}(t)} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\left.\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s} - \left.\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s}\right)}_{\mathbf{P}(t)} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\left.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_s + \left.\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s} - \left.\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s}\right)}_{\mathbf{Q}(t)} \cdot \boldsymbol{\eta} = \underbrace{\mathbf{q}(\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s,t) - \mathbf{k}(\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s,t) - \mathbf{M}(\mathbf{y}_s,t)\cdot\ddot{\mathbf{y}}_s}_{\mathbf{h}(t)} .$$

a) Berechnen Sie die folgenden Terme.

$\mathbf{M}(\mathbf{y}_s, t) =$

$\mathbf{k}(\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s, t) =$

$\left.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}\right|_{\mathbf{y}_s} =$

$\left.\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s} =$

$\left.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s}\right|_{\mathbf{y}_s} =$

$\left.\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s} =$

$\mathbf{q}(\mathbf{y}_S, \dot{\mathbf{y}}_S, t) =$

$\left.\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_S, \dot{\mathbf{y}}_S} =$

$\left.\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_S, \dot{\mathbf{y}}_S} =$

b) Wie lauten die Matrix der geschwindigkeitsabhängigen Kräfte $\mathbf{P}$ und die Matrix der lageabhängigen Kräfte $\mathbf{Q}$?

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

c) Geben Sie die lineare Bewegungsgleichung mit der linearen Massenmatrix $\mathbf{M}$, der Dämpfung-Matrix $\mathbf{D}$, der Matrix der gyroskopischen Kräfte $\mathbf{G}$, der Steifigkeits-Matrix $\mathbf{K}$, der Matrix der nichtkonservativen Kräfte $\mathbf{N}$ sowie dem Erregervektor $\mathbf{h}$ an.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}$$

$$+ \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \right) \cdot \boldsymbol{\eta} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}}$$

Linearisierung und Transformation der Bewegungsgleichungen des Doppelpendels

Aufgabe 1

Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen eines Doppelpendels ergeben sich zu

$$\mathrm{m}\mathrm{L}^2\begin{bmatrix} 2 & \cos(\alpha_1-\alpha_2) \\ \cos(\alpha_1-\alpha_2) & 1 \end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{y}}}+\mathrm{m}\mathrm{L}^2\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_2^2\sin(\alpha_1-\alpha_2) \\ -\dot{\alpha}_1^2\sin(\alpha_1-\alpha_2) \end{bmatrix}=-\mathrm{mgL}\begin{bmatrix} 2\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Diese Gleichungen sollen um die Ruhelage $\mathbf{y}_s=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \dot{\mathbf{y}}_s=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{y}}_s=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ linearisiert werden. Es gilt $\mathbf{y}=\mathbf{y}_s+\boldsymbol{\eta}$, wobei $\boldsymbol{\eta}$ der Vektor der linearen verallgemeinerten Koordinaten darstellt.

a) Berechnen Sie die folgenden Terme.

$\mathbf{M}(\mathbf{y}_s,t)=$

$\mathbf{k}(\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s,t)=$

$\left.\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\alpha_1}\right|_{\mathbf{y}_s}=$

$\left.\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s}=$

$\left.\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\alpha_2}\right|_{\mathbf{y}_s}=$

$\left.\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s}=$

$\mathbf{q}(\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s,t)=$

$\left.\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s}=$

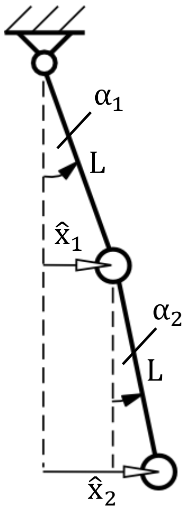
$\left.\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s}=$

b) Die linearisierten Bewegungsgleichungen lauten somit

$$\mathrm{m}\mathrm{L}^2\begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\tilde{\alpha}}_1 \\ \ddot{\tilde{\alpha}}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}}+\mathrm{mgL}\begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}}=\begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}.$$

c) Verwendet man anstelle der Winkel die horizontalen Auslenkungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ als verallgemeinerte Koordinaten, so erhält man für kleine Winkel die Beziehungen $\sin\alpha_1=\frac{\hat{x}_1}{L}\approx\tilde{\alpha}_1$ und $\sin\alpha_2=\frac{\hat{x}_2-\hat{x}_1}{L}\approx\tilde{\alpha}_2$, bzw.

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \end{bmatrix}\approx\underbrace{\frac{1}{L}\begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{\eta}}}.$$



d) Führen Sie eine Kongruenztransformation auf die neuen Koordinaten $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ durch.

$$\underbrace{\mathrm{m}\begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}^T\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{U}}\cdot\ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}+\underbrace{\frac{\mathrm{mg}}{L}\begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix}}_{\_\_\_\_\_\_\_\_\_}\cdot\hat{\boldsymbol{\eta}}=\mathbf{0}$$

e) Ändern sich dadurch die Eigenfrequenzen des Doppelpendels? _ _ _ _ _ _

Zustandsgleichungen von Mehrkörpersystemen

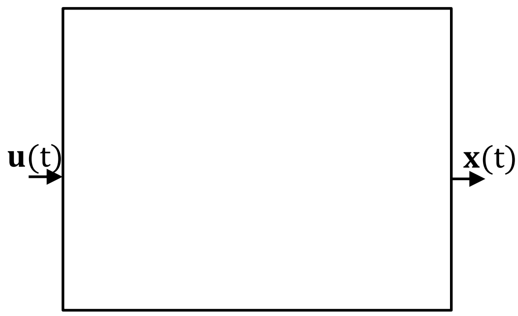
Aufgabe 1

Wie lauten die Zustandsraumdarstellungen und die zugehörigen Blockschaltbilder von idealisierten zwangserregten Schwingungssystemen, die durch …

a) nichtlineare Bewegungsgleichungen beschrieben werden?

$$\mathbf{M}(\mathrm{t}) \cdot \ddot{\mathbf{y}}(\mathrm{t}) + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{u}, \mathrm{t}) = \mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{u}, \mathrm{t})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \\ \ddot{\mathbf{y}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t})} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{function}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathrm{t})}$$

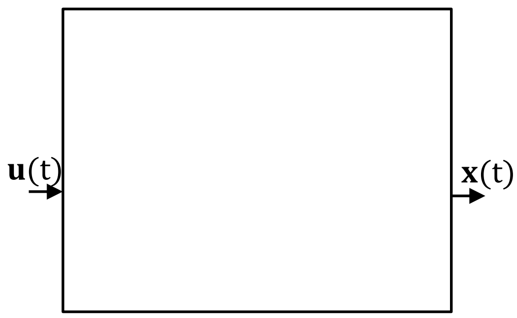


Blockschaltbild von a)

b) lineare Bewegungsgleichungen beschrieben werden?

$$\mathbf{M}(\mathrm{t}) \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}}(\mathrm{t}) + \mathbf{P}(\mathrm{t}) \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}(\mathrm{t}) + \mathbf{Q}(\mathrm{t}) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathrm{t}) = \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathrm{t})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(\mathrm{t})} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(\mathrm{t})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(\mathrm{t})} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad\quad \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathrm{t}) = \mathbf{B}(\mathrm{t}) \cdot \mathbf{u}(\mathrm{t})}$$

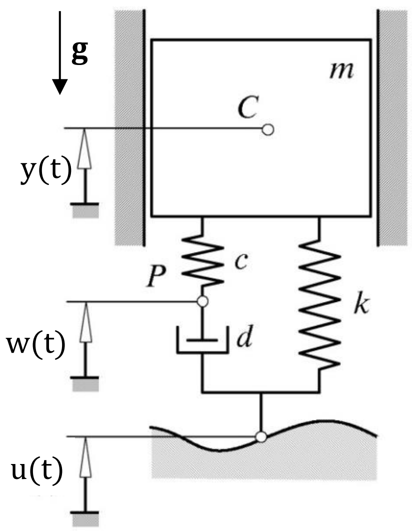


Blockschaltbild von b)

Hinweis: Da es sich um ein lineares System handelt, kann $\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathrm{t})$ auch durch die Eingangsmatrix $\mathbf{B}(\mathrm{t})$ und den Vektor der Eingänge $\mathbf{u}(\mathrm{t})$ dargestellt werden.

Aufgabe 2

Um hohe Kräfte bei stoßartigen Störungen (z.B. bei einem Fahrwerk) zu verhindern, können Federn & Dämpfer in Reihe und zusätzlich parallel geschaltet werden. Das resultierende Koppelelement hat eine Eigendynamik (PID-Kraft). Die Koordinaten y und w bezeichnen jeweils Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage für den Eingang $\mathrm{u} = 0$.



a) Schneiden Sie das System frei.

b) Wie lautet die Newtonsche Gleichung für den starren Körper mit der Masse m?

$m\,\ddot{y} =$ _

_ _

c) Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingung für den masselosen Knotenpunkt P auf.

_ _

d) Wie lautet der Zustandsvektor des Schwingers?

$$\mathbf{x} = \left[\quad \quad \quad \quad \quad \quad \right]$$

e) Welche Form haben die Zustandsgleichungen?

$$\underbrace{\left[\quad \right]}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\left[\quad \quad \quad \quad \right]}_{\mathbf{A}(t)} \cdot \underbrace{\left[\quad \right]}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\left[\quad \quad \quad \quad \right]}_{\mathbf{B}(t)} \cdot \underbrace{\left[\quad \right]}_{\mathbf{u}(t)}$$

Die Einführung von $\dot{u}$ in die Zustandsgleichung ist beim Auftreten von Unstetigkeiten wie Sprüngen in $u(t)$ für die numerische Simulation ungünstig. Durch eine andere Wahl der Zustandsgrößen lässt sich dies vermeiden:

$\hat{\mathbf{x}} = [y \quad \dot{y} \quad \hat{w}]$ mit $\hat{w} = w - u$

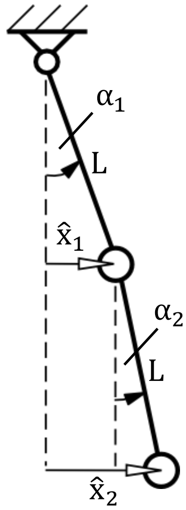
f) Welche Form haben nun die Zustandsgleichungen?

$$\underbrace{\left[\quad \right]}_{\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)} = \underbrace{\left[\quad \quad \quad \quad \right]}_{\hat{\mathbf{A}}(t)} \cdot \underbrace{\left[\quad \right]}_{\hat{\mathbf{x}}(t)} + \underbrace{\left[\quad \quad \quad \quad \right]}_{\hat{\mathbf{B}}(t)} \cdot \underbrace{\left[\quad \right]}_{\hat{\mathbf{u}}(t)}$$

Fundamentalmatrix des Doppelpendels

Aufgabe 1

Die linearisierten Zustandsgleichungen eines vereinfachten Doppelpendels (siehe auch A14) lauten für $\frac{g}{L} = 1$ und mit $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$,



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} \\ \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\,, \quad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \hline -\boldsymbol{\varkappa} & \mathbf{0} \end{array}\right], \quad \boldsymbol{\varkappa} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Wie lautet die Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}\,t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^3 t^3 + \cdots$$

bei einer Reihenentwicklung bis zum Glied dritter Ordnung?

☐ $$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{t}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varkappa}\,t^2 & -\mathbf{E}\,t + \frac{1}{6}\boldsymbol{\varkappa}\,t^3 \\ \hline \boldsymbol{\varkappa}\,t + \frac{1}{6}\boldsymbol{\varkappa}^2\,t^3 & \mathbf{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varkappa}\,t^2 \end{array}\right]$$

☐ $$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{t}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varkappa}\,t^2 & \mathbf{E}\,t - \frac{1}{6}\boldsymbol{\varkappa}\,t^3 \\ \hline -\boldsymbol{\varkappa}\,t + \frac{1}{6}\boldsymbol{\varkappa}^2\,t^3 & \mathbf{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varkappa}\,t^2 \end{array}\right]$$

b). Führen Sie die Berechnung der Fundamentalmatrix bis zu Gliedern 3. Ordnung aus.

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{t}) = \left[\begin{array}{c|c} \quad\quad & \quad\quad \\ \hline \quad\quad & \quad\quad \end{array}\right]$$

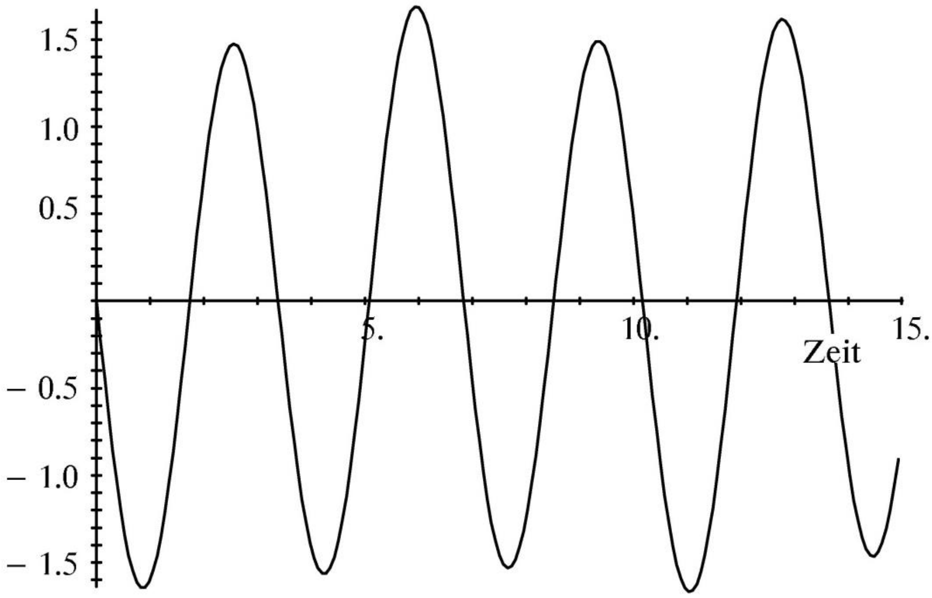
c). Welche Form hat die allgemeine Lösung zu Beginn der Bewegung, $t \ll 1$, für die Anfangsbedingung $\mathbf{x}_0 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$?

☐ $$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{2}\,t^2 \\ \frac{1}{2}\,t^2 \\ -t - \frac{1}{2}\,t^3 \\ -\frac{1}{6}\,t^3 \end{bmatrix}$$

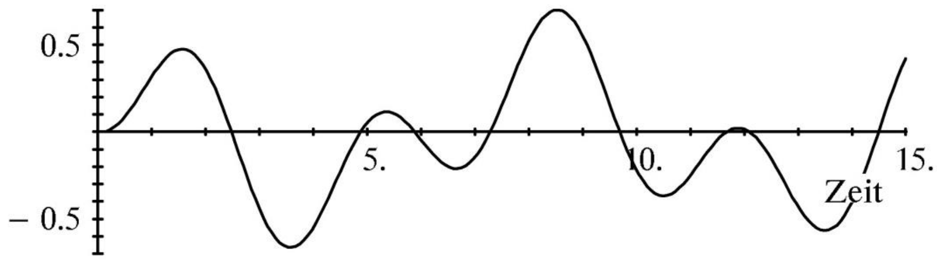
☐ $$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{2}\,t^2 \\ \frac{1}{2}\,t^2 \\ -3t + \frac{5}{3}\,t^3 \\ t - \frac{2}{3}\,t^3 \end{bmatrix}$$

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von Frage b).

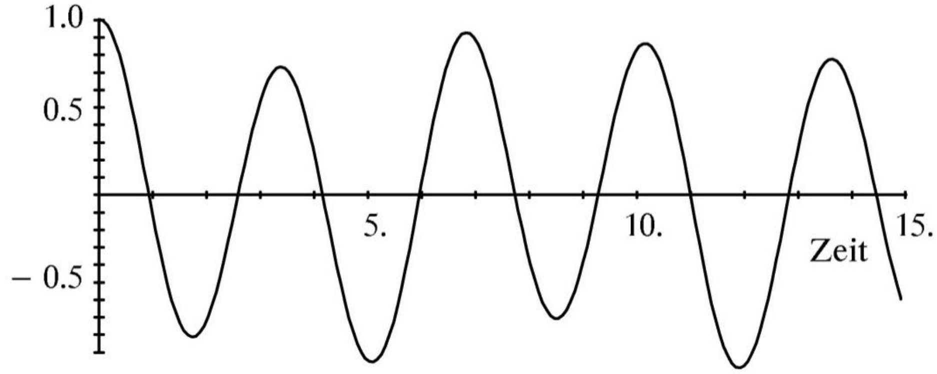
d) Durch numerische Integration mit dem Computer findet man folgende Lösungskurven. Ordnen Sie diese mit Hilfe des Ergebnisses von Frage c) den Zustandsgrößen zu.



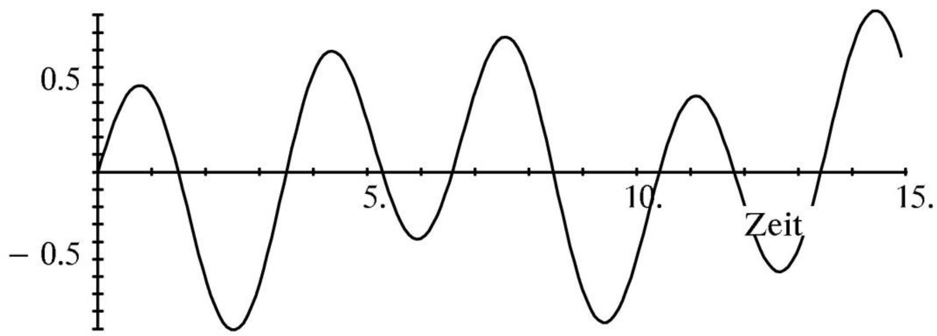
- ❑ $x_1(t)$
- ❑ $x_2(t)$
- ❑ $x_3(t)$
- ❑ $x_4(t)$



- ❑ $x_1(t)$
- ❑ $x_2(t)$
- ❑ $x_3(t)$
- ❑ $x_4(t)$



- ❑ $x_1(t)$
- ❑ $x_2(t)$
- ❑ $x_3(t)$
- ❑ $x_4(t)$



- ❑ $x_1(t)$
- ❑ $x_2(t)$
- ❑ $x_3(t)$
- ❑ $x_4(t)$

Freie Schwingungen, Modalanalyse und Entkopplung von Teilschwingungen

Aufgabe 1

Freie Schwingungen von gewöhnlichen MKS können durch das Lösen von Eigenwert-Problemen (EWP) analysiert werden. Hierbei kann das System entweder **transformiert im Zustandsraum** oder in Form der linearen **mechanischen Bewegungsgleichung** betrachtet werden. Stellen Sie beide Vorgehensweisen gegenüber und ergänzen Sie die fehlenden Angaben.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} \qquad \in \mathbb{R}^{2f}$$

$$\mathbf{M}(t)\cdot\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{P}(t)\cdot\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \quad \in \mathbb{R}^{f}$$

$$\mathbf{x}_i = \tilde{\mathbf{x}}_i\, e^{\lambda_i t} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}_i = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\mathbf{y}_i = \tilde{\mathbf{y}}_i\, e^{\lambda_i t} \rightarrow \dot{\mathbf{y}}_i = \underline{\qquad\qquad} \rightarrow \ddot{\mathbf{y}}_i = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_i \\ \lambda_i\, \tilde{\mathbf{y}}_i \end{bmatrix}}$$

$$\Big(\qquad\qquad\qquad \Big)\tilde{\mathbf{x}}_i\, e^{\lambda_i t} = \mathbf{0}$$

$$\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)\tilde{\mathbf{y}}_i\, e^{\lambda_i t} = \mathbf{0}$$

charakteristisches Polynom

$$p(\lambda) = \det\Big(\qquad\qquad\qquad \Big)$$

charakteristisches Polynom (schwache Dämpfung)

$$q(\lambda) = \det\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)$$

$$\boxed{p(\lambda) = \frac{1}{\det \mathbf{M}}\, q(\lambda)}$$

⇒ EW λ_i & EV $\underline{\qquad}$

⇒ EW $\underline{\qquad}$ & EV $\tilde{\mathbf{y}}_i$

Ähnlichkeitstransformation

$$\mathbf{X} \coloneqq [\tilde{\mathbf{x}}_1 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{x}}_i \quad \dots]$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{X}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}}\cdot\hat{\mathbf{x}}\text{, mit } \hat{\mathbf{x}} \coloneqq \mathbf{X}^{-1}\cdot\mathbf{x}$$

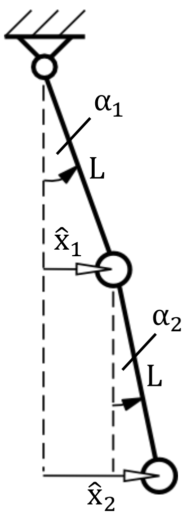
Massennormierung & spezielle Transformation

$$\bar{\mathbf{y}}_i \coloneqq \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{y}}_i^{T}\cdot \underline{\qquad} \cdot\tilde{\mathbf{y}}_i}}\,\tilde{\mathbf{y}}_i \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{Y}} \coloneqq [\bar{\mathbf{y}}_1 \dots \bar{\mathbf{y}}_i \dots]$$

$$\underbrace{\hat{\mathbf{Y}}^{T}\cdot\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{Y}}}\cdot\ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \underbrace{\hat{\mathbf{Y}}^{T}\cdot\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{Y}}}_{\hat{\mathbf{P}}}\cdot\dot{\hat{\mathbf{y}}} + \underbrace{\hat{\mathbf{Y}}^{T}\cdot\mathbf{Q}\cdot\hat{\mathbf{Y}}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0},$$

mit $\hat{\mathbf{y}} \coloneqq \hat{\mathbf{Y}}^{T}\cdot\mathbf{y}$

Aufgabe 2



Die linearisierten Zustandsgleichungen eines vereinfachten Doppelpendels (siehe auch A14) lauten für $\frac{g}{L} = 1$ und mit $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} \\ \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\,, \quad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \hline -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{array}\right], \ \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Stellen Sie das charakteristische Polynom auf.

$p(\lambda) =$ _ _ _ _ _ _ _ _ $= \det \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$

$=$
_ _

$=$
_ _

b) Wie lautet die charakteristische Gleichung?

- ❑ $p(\lambda) = \lambda^4 + 8\,\lambda^2 + 2 = 0$
- ❑ $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\,\lambda^2 + 2 = 0$
- ❑ $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\,\lambda^2 + 1 = 0$
- ❑ $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\,\lambda^2 + 1 = 0$

c) Die Eigenwerte des Doppelpendels sind durch

$\lambda_1 = i\,\omega_1\,, \quad \lambda_2 = -i\,\omega_1\,, \quad \lambda_3 = i\,\omega_2\,, \quad \lambda_4 = -i\,\omega_2$ gegeben.

Wie groß sind die Eigenfrequenzen?

- ❑ $\omega_{1,2} = \sqrt{4 \pm \sqrt{14}}$
- ❑ $\omega_{1,2} = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$
- ❑ $\omega_{1,2} = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$
- ❑ $\omega_{1,2} = 1$

d) Aus welchen Standardfunktionen setzt sich die allgemeine Lösung zusammen?

- ❑ $e^{i\omega_1 t}\,,\quad e^{-i\omega_1 t}\,,\quad e^{i\omega_2 t}\,,\quad e^{-i\omega_2 t}$
- ❑ $e^{i\omega_1 t},\quad t\,e^{i\omega_1 t},\quad e^{-i\omega_1 t},\quad t\,e^{-i\omega_1 t}$
- ❑ $\sin\omega_1 t\,,\quad \cos\omega_1 t\,,\quad \sin\omega_2 t\,,\quad \cos\omega_2 t$

Aufgabe 3

Die Bewegungsgleichungen eines ungedämpften Zweimassenschwingers, der zwangserregt wird, ergeben sich zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{6}\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}} .$$

a) Bestimmen Sie zunächst das charakteristische Polynom.

$q(\lambda) = \det(\mathbf{M}\,\lambda^2 + \mathbf{K}) =$ _

b) Durch die Substitution $\mu := \lambda^2$ ergeben sich die Nullstellen.

$\mu_1 =$ _ _ _ _ _ $\mu_2 =$ _ _ _ _ _

c) Wie lauten somit die Eigenwerte?

$\lambda_1 =$ _ _ _ _ $\lambda_2 =$ _ _ _ _ $\lambda_3 =$ _ _ _ _ $\lambda_4 =$ _ _ _ _

d) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

$$\tilde{\mathbf{y}}_1 = \begin{bmatrix} \_\ \_\ \_\ \_ \\ 1 \\ \_\ \_\ \_\ \_ \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{y}}_2 = \begin{bmatrix} \_\ \_\ \_\ \_ \\ 1 \\ \_\ \_\ \_\ \_ \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{y}}_3 = \begin{bmatrix} \_\ \_\ \_\ \_ \\ 1 \\ \_\ \_\ \_\ \_ \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{y}}_4 = \begin{bmatrix} \_\ \_\ \_\ \_ \\ 1 \\ \_\ \_\ \_\ \_ \end{bmatrix}$$

e) Geben Sie alle linear unabhängigen Eigenvektoren in der Modalmatrix mit der Form $\hat{\mathbf{Y}} = [\bar{\mathbf{y}}_1 \dots \bar{\mathbf{y}}_i \dots]$ an, wobei die Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{y}}_i$ zuvor mit $\bar{\mathbf{y}}_i := \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{y}}_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{y}}_i}} \tilde{\mathbf{y}}_i$ massennormiert werden sollen.

$$\hat{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

f) Wie lauten die modal transformierten Bewegungsgleichungen $\hat{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{h}}$ in den Normalkoordinaten $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{Y}}^T \cdot \mathbf{y}$?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}} \cdot \ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}} \cdot \hat{\mathbf{y}}$$

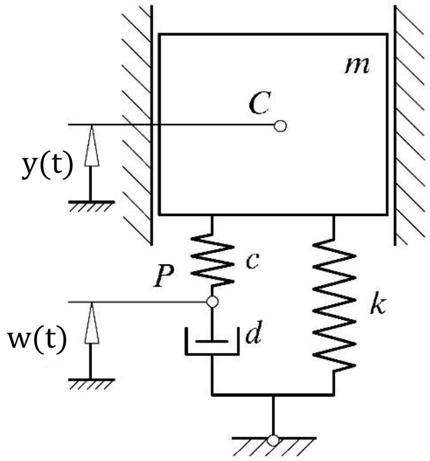
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}$$

Eigenschwingungen und freie Schwingungen eines allgemeinen Mehrkörpersystems

Aufgabe 1

Die Zustandsgleichungen eines Schwingers mit elastischem Dämpfer lauten für $\mathrm{m} = 1000\ \mathrm{kg}$, $\mathrm{c} = 5000\ \mathrm{N/m}$, $\mathrm{d} = 1250\ \mathrm{Ns/m}$ und $\mathrm{k} = 1000\ \mathrm{N/m}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} \qquad \text{mit } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{y} \\ \dot{\mathrm{y}} \\ \mathrm{w} \end{bmatrix}$$



a) Formulieren Sie die Eigenwertaufgabe.

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

b) Bestimmen Sie die charakteristische Gleichung.

_ _

c) Berechnen Sie die Eigenwerte.

$\lambda_1 = \_\_\_\_\_\_ + \mathrm{i}$, $\lambda_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$, $\lambda_3 = -2$

d) Bestimmen Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert λ_3.

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathrm{x}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \end{bmatrix}$$

e) Wie lautet die Modalmatrix?

❏ $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0.75 - 0.25\,\mathrm{i} & 0.75 + 0.25\,\mathrm{i} & 1 \\ -1 - 0.5\,\mathrm{i} & -1 + 0.5\,\mathrm{i} & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

❏ $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0.75 + 0.25\,\mathrm{i} & 0.75 - 0.25\,\mathrm{i} & 1 \\ -1 + 0.5\,\mathrm{i} & -1 - 0.5\,\mathrm{i} & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

❏ $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0.75 + 0.25\,\mathrm{i} & -1 + 0.5\,\mathrm{i} & 1 \\ 0.75 - 0.25\,\mathrm{i} & -1 - 0.5\,\mathrm{i} & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

f) Wie lautet die Zustandsgleichung in Normalkoordinaten $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{x}$ **?**

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

Damit lautet die allgemeine homogene Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} \cdot e^{\Lambda t} \cdot \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{x_0} = c_1\, \tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\, e^{(-1+\mathrm{i})t} + c_2\, \tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\, e^{(-1-\mathrm{i})t} + c_3\, \tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{3}\, e^{-2t}$$

g) Von welchem Typ müssen die Konstanten sein, um einer reellen Anfangsbedingung zu genügen?

❏ $c_1 \in \mathbb{R}$ ❏ $c_2 \in \mathbb{R}$ ❏ $c_3 \in \mathbb{R}$

❏ $c_1 \in \mathbb{C}$ ❏ $c_2 \in \mathbb{C}$ ❏ $c_3 \in \mathbb{C}$

h) Unter welcher Bedingung ergibt sich die zum Eigenwert λ_3 gehörige aperiodische Schwingungseigenform?

❏ $c_1 = 0$ ❏ $c_2 = 0$ ❏ $c_3 = 0$

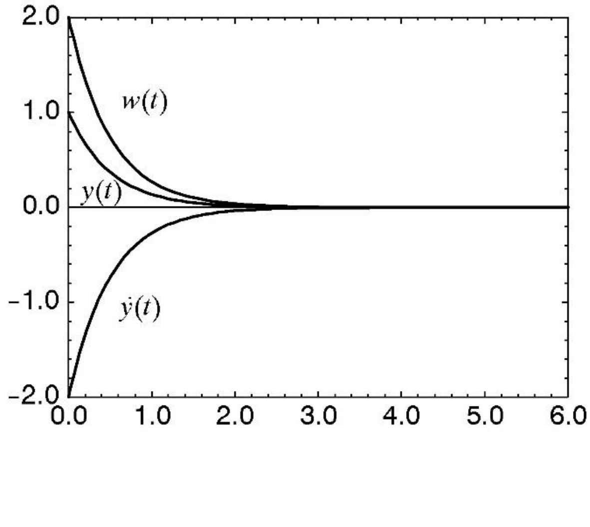
❏ $c_1 \neq 0$ ❏ $c_2 \neq 0$ ❏ $c_3 \neq 0$

i) Geben Sie die Anfangsbedingungen an, die zu der aperiodischen Schwingungseigenform führen.

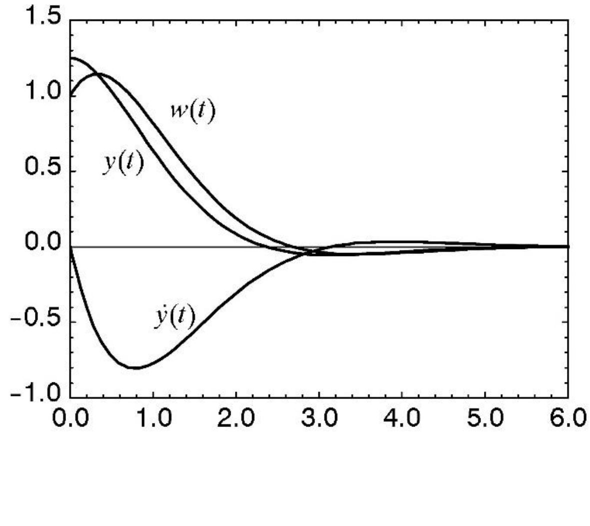
$$x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

j) Welche Bewegung stellt sich ein?

❏



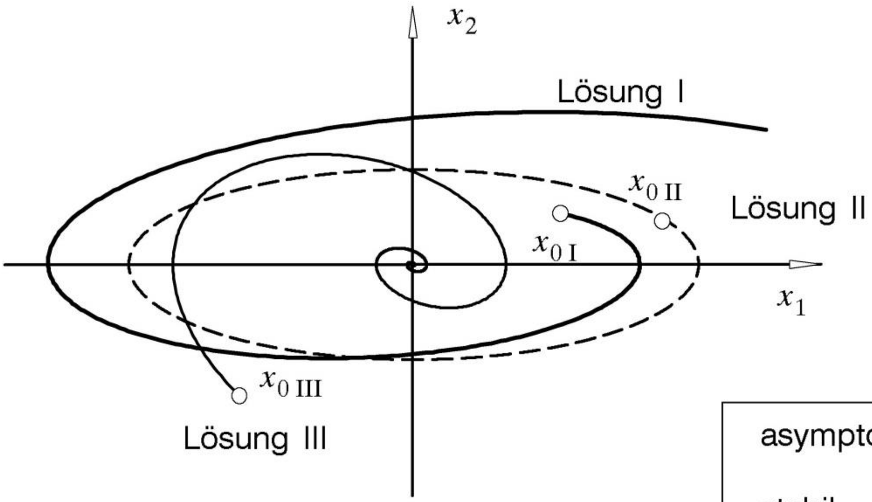
❏



Stabilität

Aufgabe 1

a) Gegeben sind ein asymptotisch stabiles, ein stabiles und ein instabiles Schwingungssystem zweiter Ordnung. Ordnen Sie die Lösungen den entsprechenden Systemklassen zu.



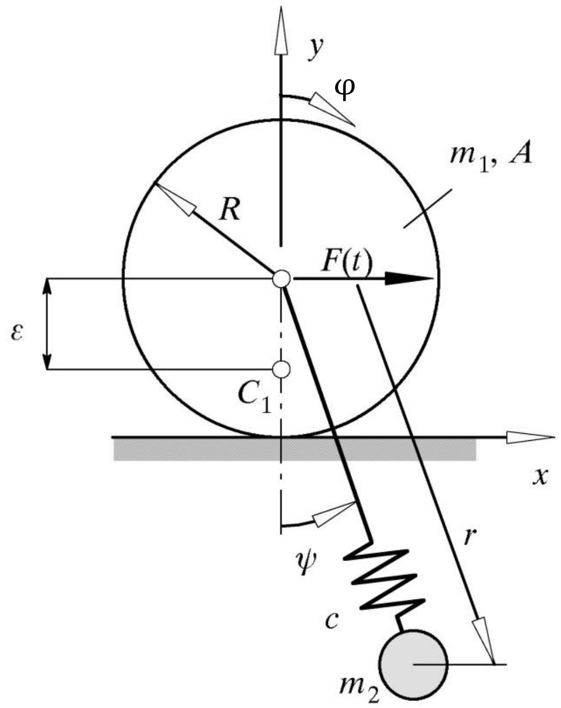
asymptotisch stabil	_ _ _ _
stabil	_ _ _ _
instabil	_ _ _ _

b) Welches Stabilitätsverhalten weisen die linearen Systeme mit den folgenden Eigenwerten auf?

	asympt. stabil	grenz−stabil	instabil
$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_{3,4} = \pm 20\,i$	❑	❑	❑
$\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 100\,i$, $\lambda_4 = -10$	❑	❑	❑
$\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = -5 \pm 100\,i$, $d_{1,2} = 1$	❑	❑	❑
$\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_{3,4} = -100 \pm 20\,i$, $d_{1,2} = 2$	❑	❑	❑
$\lambda_{1,2,3,4} = -1$, $d_{1,2,3,4} = 1$	❑	❑	❑
$\lambda_{1,2,3,4} = 0$, $d_{1,2,3,4} = 4$	❑	❑	❑
$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -5$, $\lambda_4 = -10$	❑	❑	❑
$\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_{3,4} = \pm 10\,i$	❑	❑	❑
$\lambda_1 = -0{,}1$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm 10\,i$, $\lambda_4 = -10$	❑	❑	❑
$\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -10$, $d_{1,2} = 1$	❑	❑	❑

Schwingungsanalyse einer Fördereinrichtung

Eine Fördereinrichtung wird durch das skizzierte mechanische Ersatzsystem modelliert. Das Laufrad (Radius R, Masse m_1, Trägheitstensor $I = \mathrm{diag}\{B, B, A\}$ bezüglich des Massenmittelpunktes C_1) trägt über ein masseloses, elastisches Seil (Steifigkeit c, entspannte Länge r_0) eine punktförmige Last (Masse m_2). Das Laufrad rollt entlang der raumfesten x−Koordinate (Winkel φ bzgl. der skizzierten Stellung).



Die Bewegung soll für kleine Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage analysiert werden. Die Bewegungsgleichungen sind mit Hilfe der Newton−Eulerschen −Gleichungen zu ermitteln.

Erstellen der Bewegungsgleichungen

a) Wie lautet der Lagevektor?

- ❑ $\mathbf{y} = [\varphi,\ \psi]$
- ❑ $\mathbf{y} = \psi$
- ❑ $\mathbf{y} = \varphi$
- ❑ $\mathbf{y} = [\varphi,\ \psi, r]$
- ❑ $\mathbf{y} = [\psi, r]$

b) Beschreiben Sie die Lage der beiden Körper im Inertialsystem in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten.

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

c) Wie lauten die Jacobi−Matrizen?

$$\mathbf{J}_{\mathrm{T1}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\mathrm{R1}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{\mathrm{T2}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

d) Welche Beschleunigungen ergeben sich?

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

e) Welche eingeprägten Kräfte und Momente wirken auf die freigeschnittenen Körper des Systems bezüglich ihrer Schwerpunkte?

Skizze:

$$\mathbf{f}_1^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_2^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{l}_1^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

f) Damit erhält man für die Newton−Eulerschen Gleichungen (nur gegebene Größen verwenden!)

$$\begin{bmatrix} \quad \\ \hdashline \quad \\ \hdashline \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \hdashline \quad \\ \hdashline \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \hdashline \quad \\ \hdashline \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1^r \\ \hdashline f_2^r \\ \hdashline l_1^r \end{bmatrix}$$

g) Wie lautet die globale Jacobi-Matrix des Systems?

$$\bar{\mathbf{J}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Durch Anwenden des d'Alembertschen Prinzips ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}\,(\mathbf{y},\ \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{q}\,(\mathbf{y})$$

mit

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1(R^2 + \varepsilon^2) - 2m_1 R\,\varepsilon\cos\varphi + m_2 R^2 + A & m_2 R\,r\cos\psi & m_2 R\sin\psi \\ m_2 R\,r\cos\psi & m_2 r^2 & 0 \\ m_2 R\sin\psi & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} m_1 R\,\varepsilon\,\dot{\varphi}^2\ \sin\varphi + 2m_2 R\,\dot{r}\,\dot{\psi}\cos\psi - m_2 R\,r\ \dot{\psi}^2\sin\psi \\ 2\,m_2 r\,\dot{r}\,\dot{\psi} \\ -m_2\,r\,\dot{\psi}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} R\,F(t) - \varepsilon\,m_1\,g\ \sin\varphi \\ -\,m_2\,g\ \ r\ \sin\psi \\ -c\,(r - r_0) + m_2\,g\ \cos\psi \end{bmatrix}$$

Linearisierung der Bewegungsgleichungen

h) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung um die freie Gleichgewichtslage

$$\mathbf{y}_s = [0, 0, r_s]\ , \qquad r_s = r_0 + \frac{m_2\,g}{c}$$

mit

$$\mathbf{y}\,(t) = \mathbf{y}_s + \boldsymbol{\eta}(t)\ \ ,\ \ \boldsymbol{\eta} = [\tilde{\varphi},\ \tilde{\psi},\ \tilde{r}]$$

Geben Sie die Matrizen und den Erregervektor der linearen Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G}) \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}\,(\mathbf{t})$$

an:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}$$

Für eine spezielle Wahl der Parameter

$$m_1 = m_2 = m \;, \quad \varepsilon = \frac{R}{2} \;, \quad r_s = 8\,R \;, \quad A = \frac{3}{4}\,m\,R^2, \quad F\,(t) = f_0 m\,R\cos\Omega\,t$$

und mit den Abkürzungen

$$\omega_g^2 = \frac{g}{R} \;, \quad \omega_c^2 = \frac{c}{m}$$

erhält man die lineare Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 8 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \begin{bmatrix} \omega_g^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 8\,\omega_g^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_c^2 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} f_o\cos\Omega\,t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Analyse der freien Schwingungen

i) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die freien Schwingungen?

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}$$

j) Welcher Schwingungstyp liegt vor?

- ❑ zirkulatorisch
- ❑ nichtzirkulatorisch
- ❑ gyroskopisch konservativ
- ❑ nichtgyroskopisch konservativ
- ❑ gyroskopisch gedämpft
- ❑ nichtgyroskopisch gedämpft

k) Stellen Sie das charakteristische Polynom auf.

$p(\lambda) =$ ________________________________

l) Geben Sie die Eigenfrequenzen des Systems an.

$\omega_1 =$ __________ , $\omega_2 =$ __________ , $\omega_3 =$ __________

m) Ermitteln Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

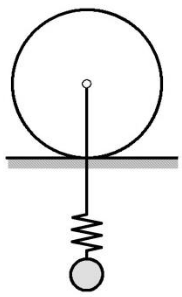
$$\tilde{\mathbf{y}}_1 : \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{y}_{11} \\ \tilde{y}_{12} \\ \tilde{y}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_2 : \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{y}_{21} \\ \tilde{y}_{22} \\ \tilde{y}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

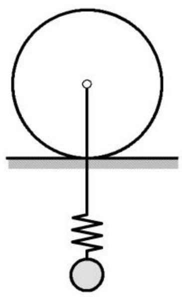
$$\tilde{\mathbf{y}}_3 : \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{y}_{31} \\ \tilde{y}_{32} \\ \tilde{y}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}_3 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

n) Skizzieren Sie die Eigenschwingungsformen.

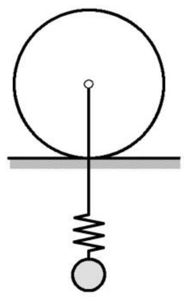
1. Eigenschwingung



2. Eigenschwingung



3. Eigenschwingung



Analyse der erzwungenen Schwingungen

o) Formulieren Sie den Erregervektor in den verschiedenen Darstellungen.

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cos\Omega t + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \sin\Omega t$$

$$= \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} e^{i\Omega t} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} e^{-i\Omega t}$$

$$= \begin{bmatrix} \_\_\_ \;\cos(\Omega t - \_\_\_) \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

p) Zur Bestimmung der Frequenzgangmatrix werden folgende Größen und Matrizen benötigt.

$$(-\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\det(-\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) =$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\operatorname{adj}(-\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) =$$

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

q) Wie berechnet sich die Frequenzgangmatrix?

- ☐ $\mathbf{F}_\mathrm{M} = (-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})$
- ☐ $\mathbf{F}_\mathrm{M} = \frac{1}{\det(-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M}+\mathbf{K})}(-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})$
- ☐ $\mathbf{F}_\mathrm{M} = (-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}$
- ☐ $\mathbf{F}_\mathrm{M} = \frac{1}{\det(-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M}+\mathbf{K})}\,\mathrm{adj}\,(-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})$
- ☐ $\mathbf{F}_\mathrm{M} = \mathrm{adj}\,(-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}$

r) Wie lautet der Amplitudenvektor der stationären Antwort $\mathbf{y}_{\mathrm{H}\infty} = \mathbf{q}_0 e^{i\Omega t} + \mathbf{q}_0^* e^{-i\Omega t}$?

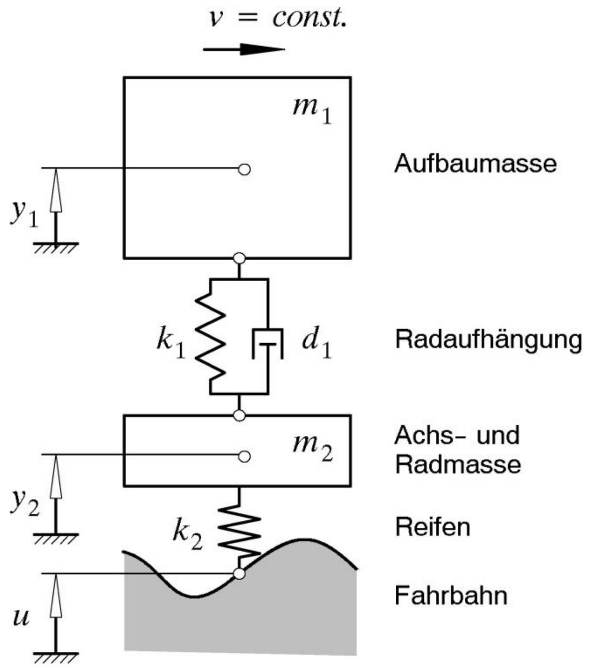
$\mathbf{q}_0 =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

$= \quad$ _ $\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

s) Welche Phänomene treten bei einer harmonischen Anregung mit verschiedenen Frequenzen Ω auf? (Annahme: alle Eigenwerte sind einfach, $\omega_c \neq \omega_g/\sqrt{8}$)

Erregerfrequenz $\mathbf{\Omega} =$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_c	$\omega_g/\sqrt{8}$
strenge Resonanz					
Resonanzerscheinung					
Scheinresonanz					
Tilgung					

Hubschwingungen eines Automobils



Die vertikalen Hubschwingungen eines Automobils lassen sich durch ein sogenanntes Viertelfahrzeugmodell beschreiben. Vernachlässigt man die Reifendämpfung, so erhält man die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{y}}(\mathrm{t}) + \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{y}}(\mathrm{t}) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{y}(\mathrm{t}) = \mathbf{h}(\mathrm{t})$$

mit den Systemmatrizen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & -d_1 \\ -d_1 & d_1 \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} u(t) \quad .$$

Bei Überfahrt einer Wellenbahn (Wellenlänge l, Amplitude u_0) mit variabler Geschwindigkeit v ergibt sich eine sinusförmige Anregung $u(t) = u_0 \cos \Omega_E t$ mit geschwindigkeitsabhängiger Erregerfrequenz

$\Omega_E = 2\,\pi\, v/l$.

a) Wie lautet die Zustandsgleichung des Systems für die Zahlenwerte

Aufbaumasse	$m_1 = 300\ \mathrm{kg}$
Achsmasse	$m_2 = 20\ \mathrm{kg}$,
Aufbaufederkonstante	$k_1 = 12000\ \mathrm{N/m}$,
Dämpferkonstante	$d_1 = 600\ \mathrm{N/m}$,
Reifenfederkonstante	$k_2 = 108000\ \mathrm{N/m}$
Fahrbahnamplitude	$u_0 = 0.01\ \mathrm{m}$?

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cos \Omega_E t$$

b) Wie lautet der komplexe Erregervektor der harm. Anregung $\mathbf{b}(\mathrm{t}) = \mathbf{b}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega_\mathrm{E}\mathrm{t}} + \mathbf{b}_0^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_\mathrm{E}\mathrm{t}}$?

$\mathbf{b}_0 = [\qquad\qquad\qquad\qquad]$

c) Wie berechnet sich der komplexe Amplitudenvektor der stationären harmonischen Antwort $\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \mathbf{g}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega_\mathrm{E}\mathrm{t}} + \mathbf{g}_0^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_\mathrm{E}\mathrm{t}}$?

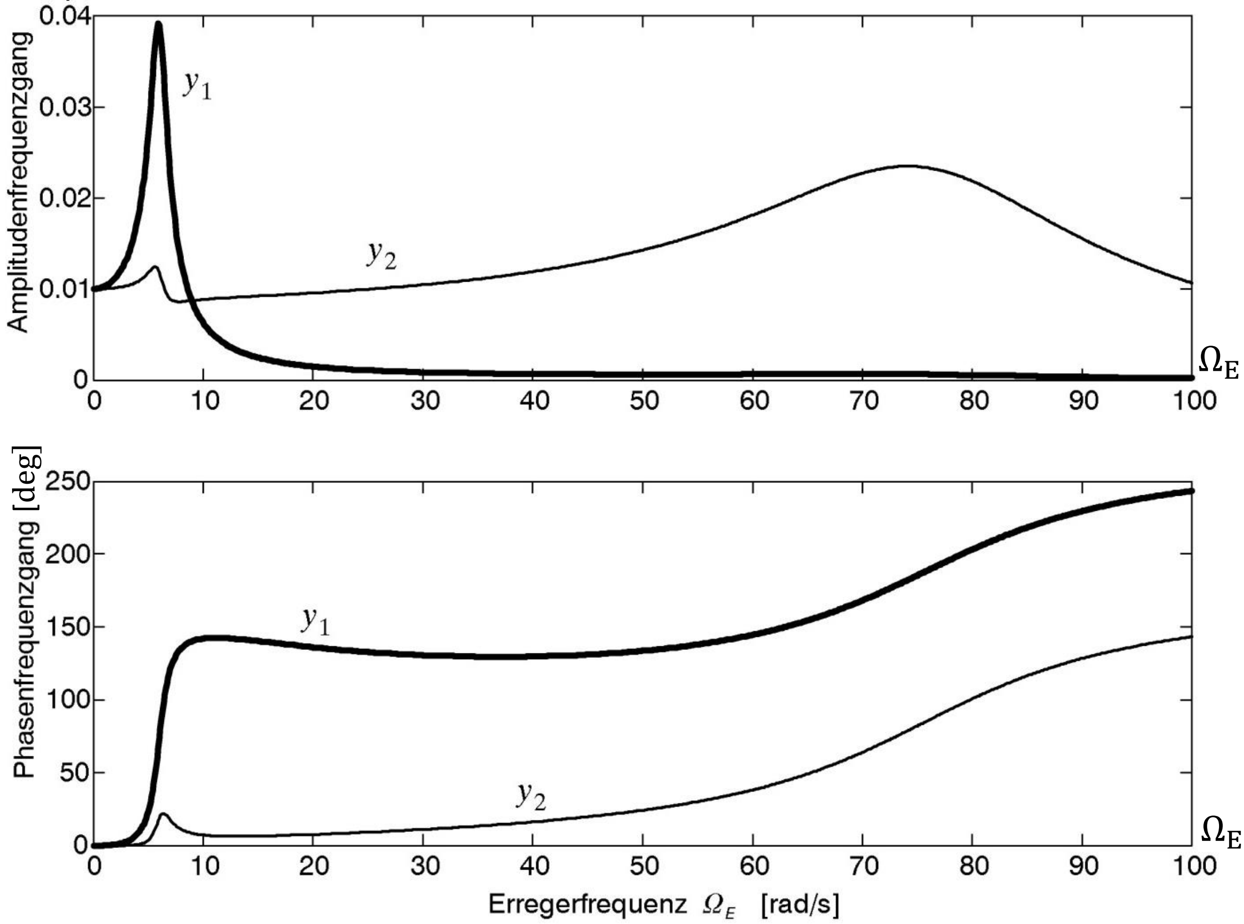
$$\mathbf{g_0} = \left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right]^{-1} \cdot \left[\qquad\qquad\right]$$

d) Wie ergeben sich daraus Amplituden- und Phasengang für die beiden Lagegrößen $y_1(t)$ und $y_2(t)$?

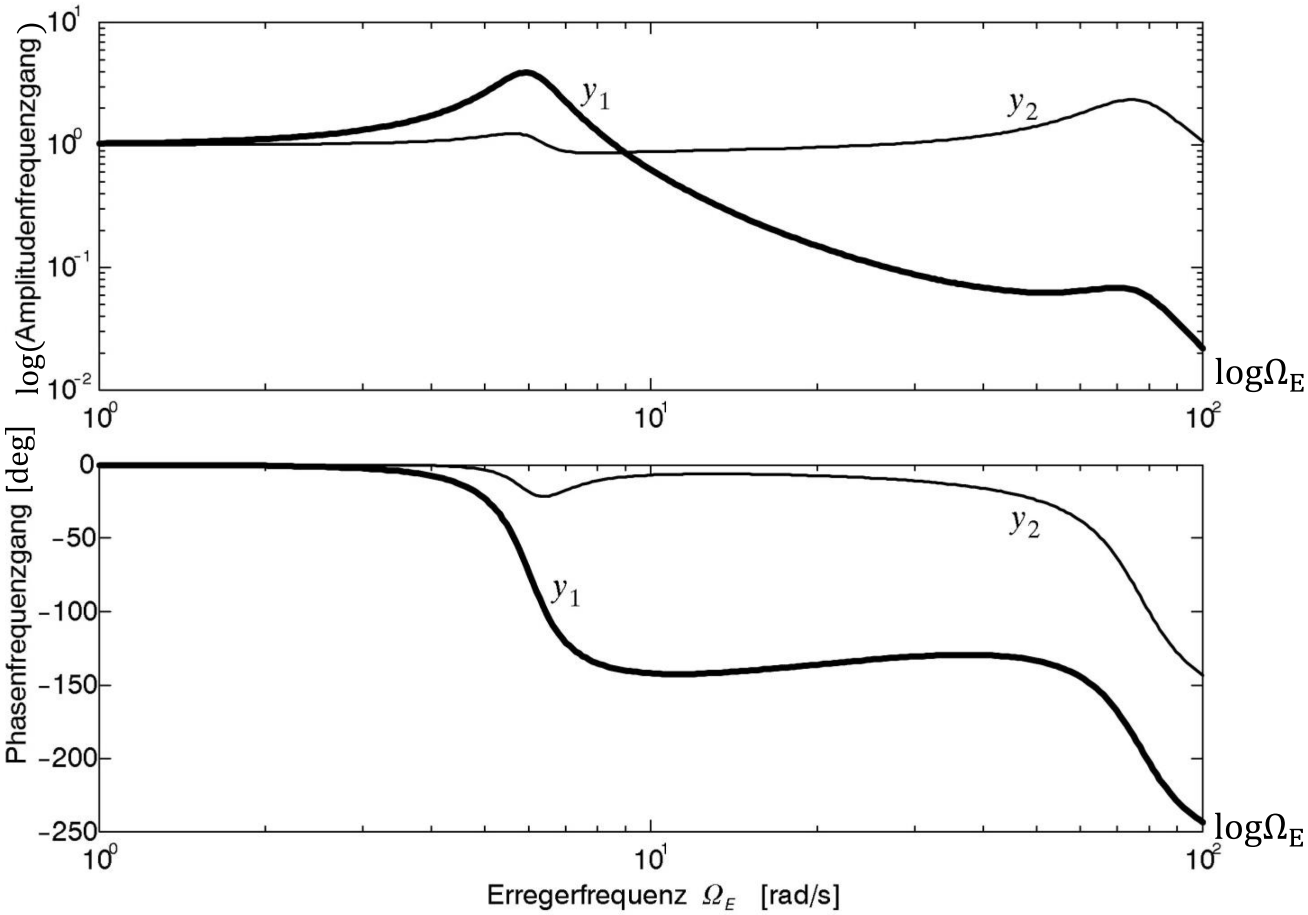
y_1 : $a_1(\Omega_E) =$ ________ , $\psi_1(\Omega_E) =$ ________

y_2 : $a_2(\Omega_E) =$ ________ , $\psi_2(\Omega_E) =$ ________

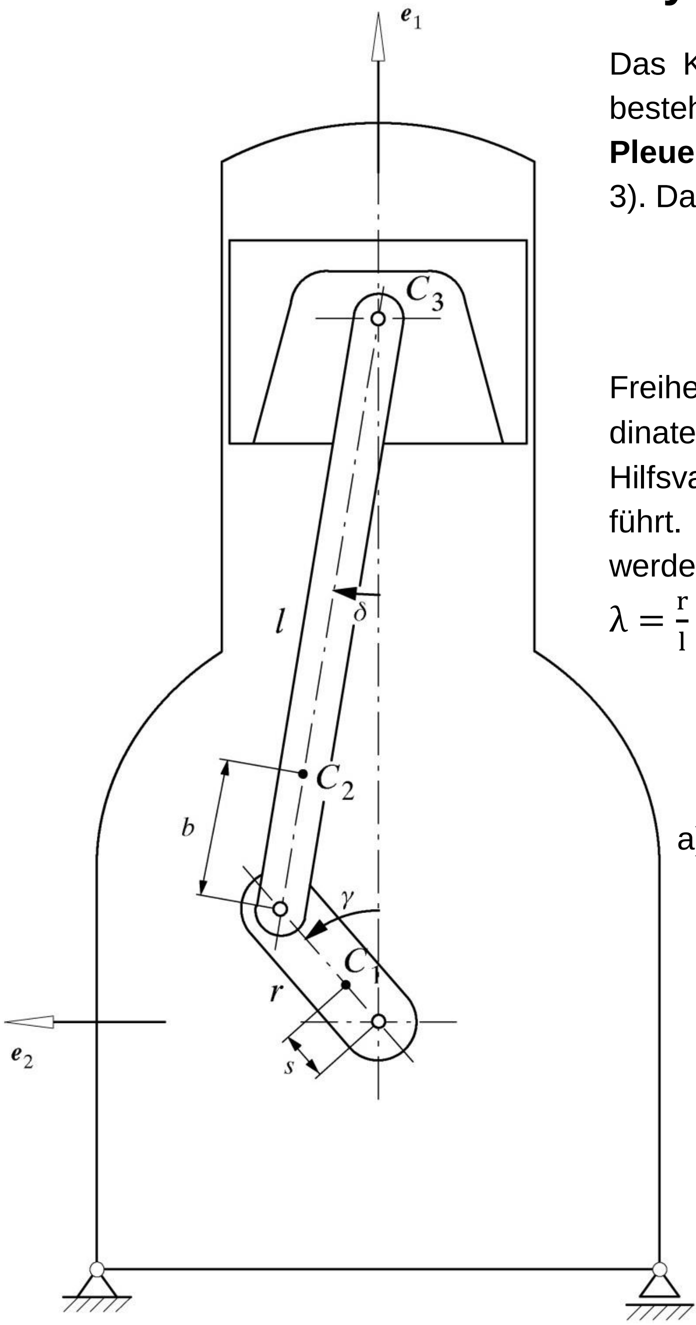
e) Durch numerische Berechnung findet man die folgenden Frequenzgänge. Interpretieren Sie die Verläufe.



f) Im Bode-Diagramm erkennt man die Feinheiten des Amplitudengangs besser.



Kinematik des Einzylindermotors



Das Kurbelgetriebe des Einzylindermotors besteht aus der **Kurbel** (Körper 1), dem **Pleuel** (Körper 2) und dem **Kolben** (Körper 3). Das Kurbelgetriebe hat

$$f = \_\_\_$$

Freiheitsgrade. Als verallgemeinerte Koordinate wird der Winkel γ und als abhängige Hilfsvariable der Pleuelwinkel $\delta(\gamma)$ eingeführt. Die geometrischen Abmessungen werden durch das Lenkstangenverhältnis $\lambda = \frac{r}{l}$ gekennzeichnet.

a) Welche Beziehungen bestehen zwischen der verallgemeinerten Koordinate γ und der Hilfsvariablen δ?

$\sin\delta =$

$\cos\delta =$

$\Rightarrow \delta =$

b) Für die zeitlichen Ableitungen der Hilfsvariable δ,

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial\delta}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dt} = \delta'\,\dot\gamma \qquad \& \qquad \frac{d\delta'}{dt} = \frac{\partial\delta'}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dt} = \delta''\,\dot\gamma$$

sollten zunächst die partiellen Ableitungen der Hilfsvariablen nach der verallgemeinerten Koordinate γ berechnet werden. Vervollständigen Sie diese. ($\frac{\partial(\arcsin x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

$$\frac{\partial\delta}{\partial\gamma} := \delta' = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{\sqrt{1 - \_\_\_\_\_\_\_\_}} = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_}{\cos\delta}$$

$$\frac{\partial \delta'}{\partial \gamma} := \delta'' = \rule{8cm}{0.4pt} = \frac{\rule{4cm}{0.4pt}}{\cos^3 \delta}$$

Berechnen Sie die Ortsvektoren, Drehtensoren, Jacobi-Matrizen, die lokalen Geschwindigkeiten und die lokalen Beschleunigungen der folgenden Bauteile:

c) **Kurbel**:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T1}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}_1}, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R1}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_1}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_1 \,, \qquad \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_1$$

d) **Pleuel**:

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T2}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}_2}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R2}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_2}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_2, \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_2$$

e) **Kolben**:

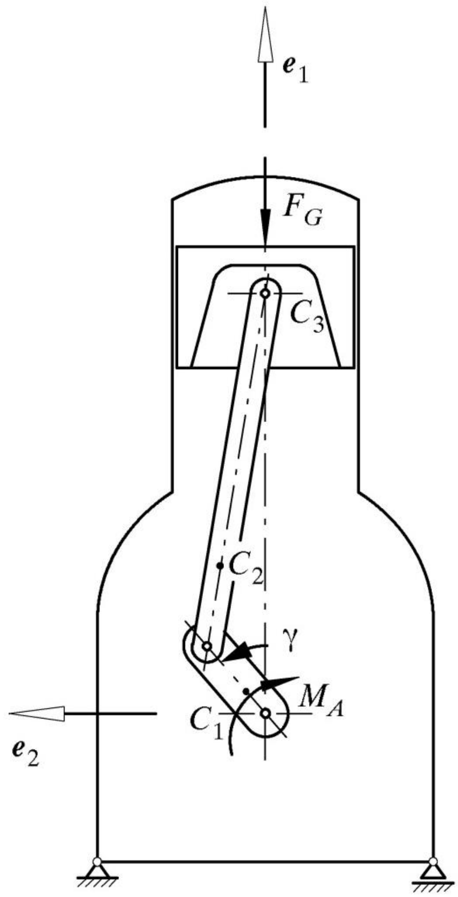
$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T3}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}_3}, \quad \boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R3}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_3}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_3, \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_3$$

Nichtlineare Bewegungsgleichung des Einzylindermotors

Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen werden neben den in Arbeitsblatt B2 entwickelten kinematischen Grundlagen folgende Angaben benötigt:



a) **Massengeometrie**

Die Kurbel, das Pleuel und der Kolben haben folgende Massen und auf den jeweiligen Massenmittelpunkt bezogene Hauptträgheitsmomente

Kurbel	m_1, I_{1z}
Pleuel	m_2, I_{2z}
Kolben	m_3

Unter der Voraussetzung, dass die z−Achse jeweils Hauptträgheitsachse ist, lauten die wesentlichen Elemente der Trägheitstensoren im raumfesten Koordinatensystem

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & \_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

b) **Eingeprägte Kräfte und Momente**

Als eingeprägte Kräfte und Momente wirken neben den Gewichtskräften die Gaskraft F_G und das Abtriebswiderstandsmoment M_A.

$$\mathbf{f}_1^e = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2^e = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_3^e = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{l}_1^e = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_2^e = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

c) Formulieren Sie die Newton−Eulerschen Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \ddot{\gamma} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \dot{\gamma}^2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1^r \\ \boldsymbol{f}_2^r \\ \boldsymbol{f}_3^r \\ \boldsymbol{l}_1^r \\ \boldsymbol{l}_2^r \end{bmatrix}$$

d) Schreiben Sie die Jacobi−Matrix des Gesamtsystems an.

$$\bar{\mathbf{J}}^{\mathrm{T}} = \left[\quad \Big| \quad \Big| \quad \Big| \quad \Big| \quad \right]$$

e) Die Bewegungsgleichung ergibt sich nun durch Elimination der Zwangskräfte. Ergänzen und vereinfachen Sie die folgende Gleichung.

$$\{\mathrm{m}_1$$
$$+\mathrm{m}_2(\qquad\qquad)$$
$$+\mathrm{m}_3(\qquad\qquad)$$
$$+\mathrm{I}_{1z}$$
$$+\mathrm{I}_{2z}\qquad\qquad\}\,\ddot{\gamma}$$

$$+\mathrm{m}_2(\qquad\qquad)$$
$$+\mathrm{m}_3[\qquad\qquad]$$
$$+\mathrm{I}_{2z}\qquad\qquad\}\,\dot{\gamma}^2$$

$$= \mathrm{m}_1(\qquad\qquad)$$
$$+\mathrm{m}_2(\qquad\qquad)$$
$$+\mathrm{m}_3(\qquad\qquad)$$
$$+\mathrm{F}_G\,(\qquad\qquad)$$
$$-\,\mathrm{M}_A$$

oder abgekürzt $\quad \mathbf{M}\,\ddot{\gamma} + \mathbf{k}\,\dot{\gamma}^2 = \mathbf{q}$.