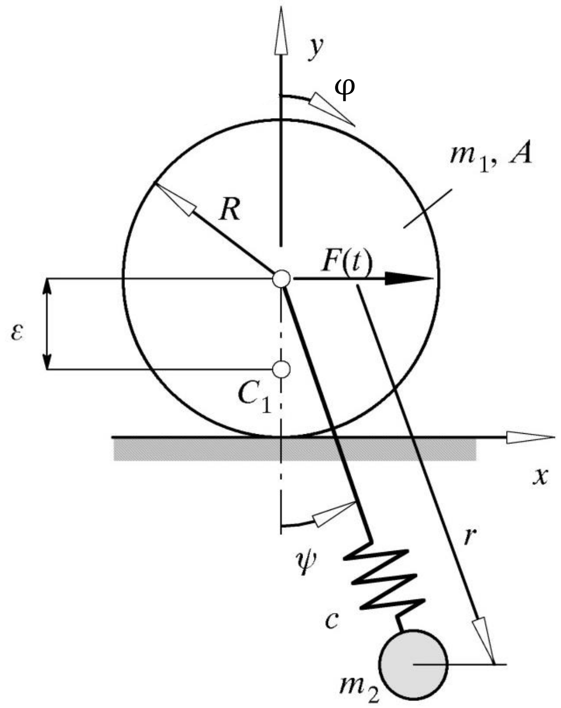
Schwingungsanalyse einer Fördereinrichtung

Eine Fördereinrichtung wird durch das skizzierte mechanische Ersatzsystem modelliert. Das Laufrad (Radius R, Masse m_1, Trägheitstensor $\mathrm{I} = \mathrm{diag}\,\{\mathrm{B}, \mathrm{B}, \mathrm{A}\}$ bezüglich des Massenmittelpunktes C_1) trägt über ein masseloses, elastisches Seil (Steifigkeit c, entspannte Länge r_0) eine punktförmige Last (Masse m_2). Das Laufrad rollt entlang der raumfesten x−Koordinate (Winkel φ bzgl. der skizzierten Stellung).



Die Bewegung soll für kleine Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage analysiert werden. Die Bewegungsgleichungen sind mit Hilfe der Newton−Eulerschen −Gleichungen zu ermitteln.

Erstellen der Bewegungsgleichungen

a) Wie lautet der Lagevektor?

- ❑ $\mathbf{y} = [\varphi,\ \psi]$
- ❑ $\mathbf{y} = \psi$
- ❑ $\mathbf{y} = \varphi$
- ❑ $\mathbf{y} = [\varphi,\ \psi, \mathrm{r}]$
- ❑ $\mathbf{y} = [\psi, \mathrm{r}]$

b) Beschreiben Sie die Lage der beiden Körper im Inertialsystem in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten.

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

c) Wie lauten die Jacobi−Matrizen?

$$\mathbf{J}_{\mathrm{T1}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\mathrm{R1}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{\mathrm{T2}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

d) Welche Beschleunigungen ergeben sich?

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

e) Welche eingeprägten Kräfte und Momente wirken auf die freigeschnittenen Körper des Systems bezüglich ihrer Schwerpunkte?

Skizze:

$$\mathbf{f}_1^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_2^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{l}_1^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

f) Damit erhält man für die Newton−Eulerschen Gleichungen (nur gegebene Größen verwenden!)

$$\begin{bmatrix} \quad \\ \hline \quad \\ \hline \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \hline \quad \\ \hline \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \hline \quad \\ \hline \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1^r \\ \hline f_2^r \\ \hline l_1^r \end{bmatrix}$$

g) Wie lautet die globale Jacobi-Matrix des Systems?

$$\bar{\mathbf{J}}^{T} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Durch Anwenden des d'Alembertschen Prinzips ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}\,(\mathbf{y},\ \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{q}\,(\mathbf{y})$$

mit

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1(R^2 + \varepsilon^2) - 2m_1 R\,\varepsilon\cos\varphi + m_2 R^2 + A & m_2 R\,r\cos\psi & m_2 R\sin\psi \\ m_2 R\,r\cos\psi & m_2 r^2 & 0 \\ m_2 R\sin\psi & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} m_1 R\,\varepsilon\,\dot{\varphi}^2\ \sin\varphi + 2m_2 R\,\dot{r}\,\dot{\psi}\cos\psi - m_2 R\,r\ \dot{\psi}^2\sin\psi \\ 2\,m_2 r\,\dot{r}\,\dot{\psi} \\ -m_2\,r\,\dot{\psi}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} R\,F(t) - \varepsilon\,m_1\,g\ \sin\varphi \\ -\,m_2\ g\ \ r\ \sin\psi \\ -c\,(r - r_0) + m_2\ g\ \cos\psi \end{bmatrix}$$

Linearisierung der Bewegungsgleichungen

h) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung um die freie Gleichgewichtslage

$$\mathbf{y}_s = [0, 0, r_s]\ , \qquad r_s = r_0 + \frac{m_2\,g}{c}$$

mit

$$\mathbf{y}\,(t) = \mathbf{y}_s + \boldsymbol{\eta}(t)\ \ ,\ \ \boldsymbol{\eta} = [\tilde{\varphi},\ \tilde{\psi},\ \tilde{r}]$$

Geben Sie die Matrizen und den Erregervektor der linearen Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G}) \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}\,(\mathbf{t})$$

an:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Für eine spezielle Wahl der Parameter

$$m_1 = m_2 = m \;,\; \varepsilon = \frac{R}{2} \;,\; r_s = 8\,R \;,\; A = \frac{3}{4}\,m\,R^2, \;\; F\,(t) = f_0 m\,R \cos\Omega\,t$$

und mit den Abkürzungen

$$\omega_g^2 = \frac{g}{R} \;,\; \omega_c^2 = \frac{c}{m}$$

erhält man die lineare Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 8 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \begin{bmatrix} \omega_g^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 8\,\omega_g^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_c^2 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} f_o \cos\Omega\,t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Analyse der freien Schwingungen

i) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die freien Schwingungen?

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

j) Welcher Schwingungstyp liegt vor?

- ☐ zirkulatorisch
- ☐ nichtzirkulatorisch
- ☐ gyroskopisch konservativ
- ☐ nichtgyroskopisch konservativ
- ☐ gyroskopisch gedämpft
- ☐ nichtgyroskopisch gedämpft

k) Stellen Sie das charakteristische Polynom auf.

$p(\lambda) =$ _

l) Geben Sie die Eigenfrequenzen des Systems an.

$\omega_1 =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ , $\omega_2 =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ , $\omega_3 =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

m) Ermitteln Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

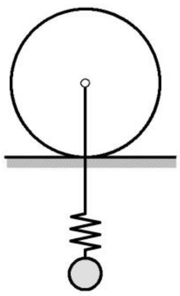
$$\tilde{\mathbf{y}}_1 : \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{y}_{11} \\ \tilde{y}_{12} \\ \tilde{y}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_2 : \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{y}_{21} \\ \tilde{y}_{22} \\ \tilde{y}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}$$

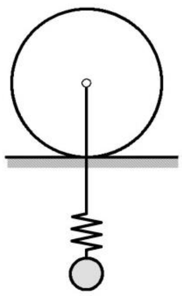
$$\tilde{\mathbf{y}}_3 : \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{y}_{31} \\ \tilde{y}_{32} \\ \tilde{y}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}_3 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}$$

n) Skizzieren Sie die Eigenschwingungsformen.

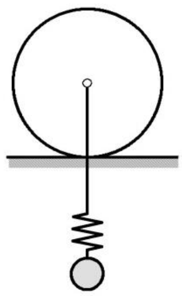
1. Eigenschwingung



2. Eigenschwingung



3. Eigenschwingung



Analyse der erzwungenen Schwingungen

o) Formulieren Sie den Erregervektor in den verschiedenen Darstellungen.

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cos\Omega t + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \sin\Omega t$$

$$= \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} e^{i\Omega t} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} e^{-i\Omega t}$$

$$= \begin{bmatrix} \_\_\_ \cos(\Omega t - \_\_\_) \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

p) Zur Bestimmung der Frequenzgangmatrix werden folgende Größen und Matrizen benötigt.

$$(-\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\det(-\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) = \frac{}{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$\operatorname{adj}(-\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) =$$

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

q) Wie berechnet sich die Frequenzgangmatrix?

- ☐ $\mathbf{F}_\mathrm{M} = (-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})$
- ☐ $\mathbf{F}_\mathrm{M} = \frac{1}{\det(-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M}+\mathbf{K})}\,(-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})$
- ☐ $\mathbf{F}_\mathrm{M} = (-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}$
- ☐ $\mathbf{F}_\mathrm{M} = \frac{1}{\det(-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M}+\mathbf{K})}\,\mathrm{adj}\,(-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})$
- ☐ $\mathbf{F}_\mathrm{M} = \mathrm{adj}\,(-\mathbf{\Omega}^2\mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}$

r) Wie lautet der Amplitudenvektor der stationären Antwort $\mathbf{y}_{\mathrm{H}\infty} = \mathbf{q}_0 e^{i\Omega t} + \mathbf{q}_0^* e^{-i\Omega t}$?

$\mathbf{q}_0 =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

$=$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

s) Welche Phänomene treten bei einer harmonischen Anregung mit verschiedenen Frequenzen Ω auf? (Annahme: alle Eigenwerte sind einfach, $\omega_c \neq \omega_g/\sqrt{8}$)

Erregerfrequenz $\mathbf{\Omega} =$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_c	$\omega_g/\sqrt{8}$
strenge Resonanz					
Resonanzerscheinung					
Scheinresonanz					
Tilgung					