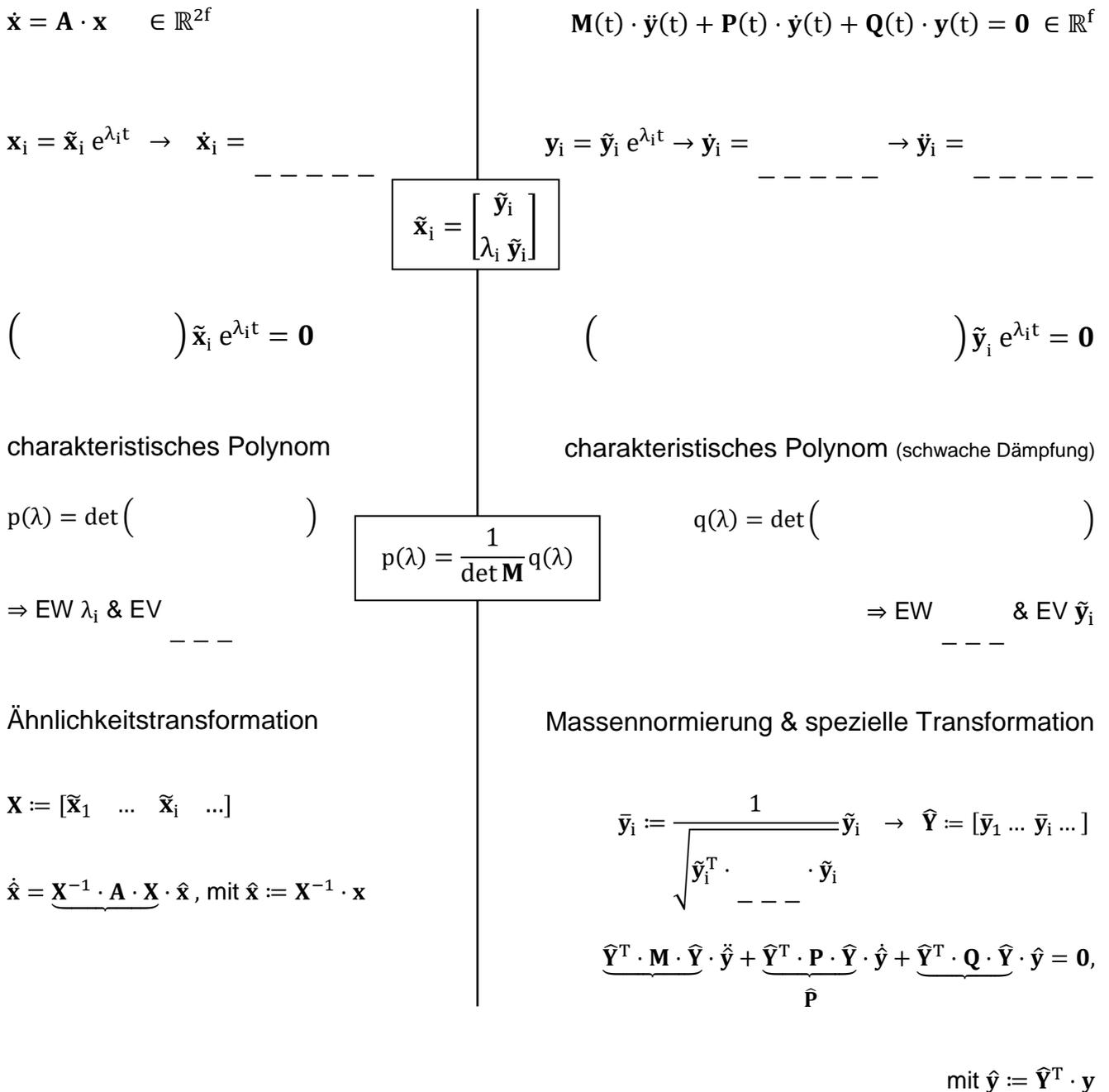




# Freie Schwingungen, Modalanalyse und Entkopplung von Teilschwingungen

## Aufgabe 1

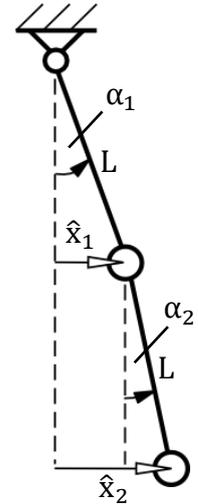
Freie Schwingungen von gewöhnlichen MKS können durch das Lösen von Eigenwert-Problemen (EWP) analysiert werden. Hierbei kann das System entweder **transformiert im Zustandsraum** oder in Form der linearen **mechanischen Bewegungsgleichung** betrachtet werden. Stellen Sie beide Vorgehensweisen gegenüber und ergänzen Sie die fehlenden Angaben.



### Aufgabe 2

Die linearisierten Zustandsgleichungen eines vereinfachten Doppelpendels (siehe auch A14) lauten für  $\frac{g}{L} = 1$  und mit  $\hat{\eta} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$ ,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\hat{\eta}} \\ \ddot{\hat{\eta}} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$



a) Stellen Sie das charakteristische Polynom auf.

$$p(\lambda) = \text{det} \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} & \lambda \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

=

-----

=

-----

b) Wie lautet die charakteristische Gleichung?

- $p(\lambda) = \lambda^4 + 8\lambda^2 + 2 = 0$
- $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 + 2 = 0$
- $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$
- $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 + 1 = 0$

c) Die Eigenwerte des Doppelpendels sind durch

$$\lambda_1 = i\omega_1, \quad \lambda_2 = -i\omega_1, \quad \lambda_3 = i\omega_2, \quad \lambda_4 = -i\omega_2 \quad \text{gegeben.}$$

Wie groß sind die Eigenfrequenzen?

- $\omega_{1,2} = \sqrt{4 \pm \sqrt{14}}$
- $\omega_{1,2} = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$
- $\omega_{1,2} = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$
- $\omega_{1,2} = 1$

d) Aus welchen Standardfunktionen setzt sich die allgemeine Lösung zusammen?

- $e^{i\omega_1 t}, e^{-i\omega_1 t}, e^{i\omega_2 t}, e^{-i\omega_2 t}$
- $e^{i\omega_1 t}, t e^{i\omega_1 t}, e^{-i\omega_1 t}, t e^{-i\omega_1 t}$
- $\sin \omega_1 t, \cos \omega_1 t, \sin \omega_2 t, \cos \omega_2 t$



**Aufgabe 3**

Die Bewegungsgleichungen eines ungedämpften Zweimassenschwingers, der zwangserregt wird, ergeben sich zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{6}\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}}$$

a) Bestimmen Sie zunächst das charakteristische Polynom.

$q(\lambda) = \det(\mathbf{M} \lambda^2 + \mathbf{K}) =$  \_\_\_\_\_

b) Durch die Substitution  $\mu := \lambda^2$  ergeben sich die Nullstellen.

$\mu_1 =$  \_\_\_\_\_  $\mu_2 =$  \_\_\_\_\_

c) Wie lauten somit die Eigenwerte?

$\lambda_1 =$  \_\_\_\_\_  $\lambda_2 =$  \_\_\_\_\_  $\lambda_3 =$  \_\_\_\_\_  $\lambda_4 =$  \_\_\_\_\_

d) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

$\tilde{\mathbf{y}}_1 = \begin{bmatrix} \text{---} \\ 1 \\ \text{---} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{y}}_2 = \begin{bmatrix} \text{---} \\ 1 \\ \text{---} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{y}}_3 = \begin{bmatrix} \text{---} \\ 1 \\ \text{---} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{y}}_4 = \begin{bmatrix} \text{---} \\ 1 \\ \text{---} \end{bmatrix}$

e) Geben Sie alle linear unabhängigen Eigenvektoren in der Modalmatrix mit der Form  $\hat{\mathbf{Y}} = [\tilde{\mathbf{y}}_1 \dots \tilde{\mathbf{y}}_i \dots]$  an, wobei die Eigenvektoren  $\tilde{\mathbf{y}}_i$  zuvor mit

$\tilde{\mathbf{y}}_i := \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{y}}_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{y}}_i}} \tilde{\mathbf{y}}_i$  massennormiert werden sollen.

$$\hat{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \end{bmatrix}$$

f) Wie lauten die modal transformierten Bewegungsgleichungen

$\hat{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{h}}$  in den Normalkoordinaten  $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{Y}}^T \cdot \mathbf{y}$ ?

$$\begin{bmatrix} \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \end{bmatrix} \cdot \ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \begin{bmatrix} \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{y}}$$

$$= \begin{bmatrix} \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \\ \phantom{\dots} \end{bmatrix}$$