Freie Schwingungen, Modalanalyse und Entkopplung von Teilschwingungen

Aufgabe 1

Freie Schwingungen von gewöhnlichen MKS können durch das Lösen von Eigenwert-Problemen (EWP) analysiert werden. Hierbei kann das System entweder **transformiert im Zustandsraum** oder in Form der linearen **mechanischen Bewegungsgleichung** betrachtet werden. Stellen Sie beide Vorgehensweisen gegenüber und ergänzen Sie die fehlenden Angaben.

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \qquad \in \mathbb{R}^{2f \times 2f}$

$\mathbf{x}_i = \tilde{\mathbf{x}}_i \, e^{\lambda_i t} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}_i = \underline{\hspace{3cm}}$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_i \\ \lambda_i \, \tilde{\mathbf{y}}_i \end{bmatrix}}$$

$\Big(\hspace{4cm} \Big) \tilde{\mathbf{x}}_i \, e^{\lambda_i t} = \mathbf{0}$

charakteristisches Polynom

$p(\lambda) = \det\Big(\hspace{5cm} \Big)$

$$\boxed{p(\lambda) = \frac{1}{\det \mathbf{M}} q(\lambda)}$$

⇒ EW λ_i & EV $\underline{\hspace{1.5cm}}$

Ähnlichkeitstransformation

$\mathbf{X} \coloneqq [\tilde{\mathbf{x}}_1 \quad \ldots \quad \tilde{\mathbf{x}}_i \quad \ldots]$

$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, mit $\hat{\mathbf{x}} \coloneqq \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{x}$

$\mathbf{M}(t) \cdot \ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \quad \in \mathbb{R}^{f \times f}$

$\mathbf{y}_i = \tilde{\mathbf{y}}_i \, e^{\lambda_i t} \rightarrow \dot{\mathbf{y}}_i = \underline{\hspace{3cm}} \rightarrow \ddot{\mathbf{y}}_i = \underline{\hspace{3cm}}$

$\Big(\hspace{8cm} \Big) \tilde{\mathbf{y}}_i \, e^{\lambda_i t} = \mathbf{0}$

charakteristisches Polynom (schwache Dämpfung)

$q(\lambda) = \det\Big(\hspace{6cm} \Big)$

⇒ EW $\underline{\hspace{1.5cm}}$ & EV $\tilde{\mathbf{y}}_i$

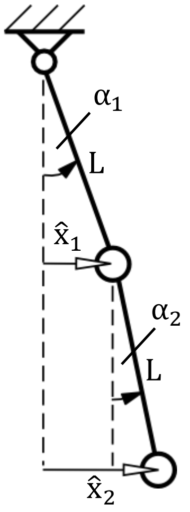
Massennormierung & spezielle Transformation

$\bar{\mathbf{y}}_i \coloneqq \dfrac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{y}}_i^T \cdot \underline{\hspace{1.5cm}} \cdot \tilde{\mathbf{y}}_i}} \tilde{\mathbf{y}}_i \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{Y}} \coloneqq [\bar{\mathbf{y}}_1 \ldots \bar{\mathbf{y}}_i \ldots]$

$\underbrace{\hat{\mathbf{Y}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{Y}}} \cdot \ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \underbrace{\hat{\mathbf{Y}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{Y}}}_{\hat{\mathbf{P}}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{y}}} + \underbrace{\hat{\mathbf{Y}}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{Y}}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$,

mit $\hat{\mathbf{y}} \coloneqq \hat{\mathbf{Y}}^{-1} \cdot \mathbf{y}$

Aufgabe 2



Die linearisierten Zustandsgleichungen eines vereinfachten Doppelpendels (siehe auch A14) lauten für $\frac{g}{L} = 1$ und mit $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} \\ \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\ , \quad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \hline -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{array}\right], \quad \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Stellen Sie das charakteristische Polynom auf.

$$p(\lambda) = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \det \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

$=$

____

$=$

____

b) Wie lautet die charakteristische Gleichung?

- ❑ $p(\lambda) = \lambda^4 + 8\,\lambda^2 + 2 = 0$
- ❑ $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\,\lambda^2 + 2 = 0$
- ❑ $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\,\lambda^2 + 1 = 0$
- ❑ $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\,\lambda^2 + 1 = 0$

c) Die Eigenwerte des Doppelpendels sind durch

$\lambda_1 = i\,\omega_1\ , \quad \lambda_2 = -i\,\omega_1\ , \quad \lambda_3 = i\,\omega_2\ , \quad \lambda_4 = -i\,\omega_2$ gegeben.

Wie groß sind die Eigenfrequenzen?

- ❑ $\omega_{1,2} = \sqrt{4 \pm \sqrt{14}}$
- ❑ $\omega_{1,2} = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$
- ❑ $\omega_{1,2} = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$
- ❑ $\omega_{1,2} = 1$

d) Aus welchen Standardfunktionen setzt sich die allgemeine Lösung zusammen?

- ❑ $e^{i\omega_1 t}\ , \quad e^{-i\omega_1 t}\ , \quad e^{i\omega_2 t}\ , \quad e^{-i\omega_2 t}$
- ❑ $e^{i\omega_1 t}, \quad t\,e^{i\omega_1 t}, \quad e^{-i\omega_1 t}, \quad t\,e^{-i\omega_1 t}$
- ❑ $\sin\omega_1 t\ , \quad \cos\omega_1 t\ , \quad \sin\omega_2 t\ , \quad \cos\omega_2 t$

Aufgabe 3

Die Bewegungsgleichungen eines ungedämpften Zweimassenschwingers, der zwangserregt wird, ergeben sich zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{6}\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}} .$$

a) Bestimmen Sie zunächst das charakteristische Polynom.

$$\mathrm{q}(\lambda) = \det(\mathbf{M}\,\lambda^2 + \mathbf{K}) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

b) Durch die Substitution $\mu := \lambda^2$ ergeben sich die Nullstellen.

$$\mu_1 = \_\_\_\_\_ \qquad \mu_2 = \_\_\_\_\_$$

c) Wie lauten somit die Eigenwerte?

$$\lambda_1 = \_\_\_\_ \quad \lambda_2 = \_\_\_\_ \quad \lambda_3 = \_\_\_\_ \quad \lambda_4 = \_\_\_\_$$

d) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

$$\tilde{\mathbf{y}}_1 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ 1 \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{y}}_2 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ 1 \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{y}}_3 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ 1 \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{y}}_4 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ 1 \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

e) Geben Sie alle linear unabhängigen Eigenvektoren in der Modalmatrix mit der Form $\hat{\mathbf{Y}} = [\bar{\mathbf{y}}_1 \ldots \bar{\mathbf{y}}_\mathrm{i} \ldots]$ an, wobei die Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{i}$ zuvor mit $\bar{\mathbf{y}}_\mathrm{i} := \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{i}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{M} \cdot \tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{i}}} \tilde{\mathbf{y}}_\mathrm{i}$ massennormiert werden sollen.

$$\hat{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

f) Wie lauten die modal transformierten Bewegungsgleichungen $\hat{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{h}}$ in den Normalkoordinaten $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{Y}}^{-1} \cdot \mathbf{y}$?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}} \cdot \ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}} \cdot \hat{\mathbf{y}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}}$$