Linearisierung und Transformation der Bewegungsgleichungen des Doppelpendels

Aufgabe 1

Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen eines Doppelpendels ergeben sich zu

$$mL^2 \begin{bmatrix} 2 & \cos(\alpha_1-\alpha_2) \\ \cos(\alpha_1-\alpha_2) & 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{y}}} + mL^2 \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1-\alpha_2) \\ -\dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1-\alpha_2) \end{bmatrix} = -mgL \begin{bmatrix} 2\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Diese Gleichungen sollen um die Ruhelage $\mathbf{y}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{y}}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{y}}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ linearisiert werden. Es gilt $\mathbf{y} = \mathbf{y}_s + \boldsymbol{\eta}$, wobei $\boldsymbol{\eta}$ der Vektor der linearen verallgemeinerten Koordinaten darstellt.

a) Berechnen Sie die folgenden Terme.

$\mathbf{M}(\mathbf{y}_s, t) =$

$\mathbf{k}(\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s, t) =$

$\left.\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha_1}\right|_{\mathbf{y}_s} =$

$\left.\dfrac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s} =$

$\left.\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha_2}\right|_{\mathbf{y}_s} =$

$\left.\dfrac{\partial \mathbf{k}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s} =$

$\mathbf{q}(\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s, t) =$

$\left.\dfrac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s} =$

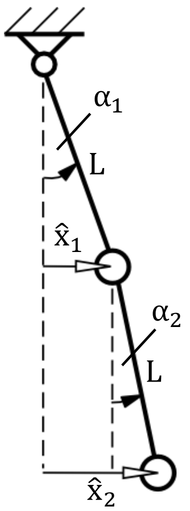
$\left.\dfrac{\partial \mathbf{q}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s} =$

b) Die linearisierten Bewegungsgleichungen lauten somit

$$mL^2 \begin{bmatrix} \text{\_ \_ \_ \_} & \text{\_ \_ \_ \_} \\ \text{\_ \_ \_ \_} & \text{\_ \_ \_ \_} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\tilde{\alpha}}_1 \\ \ddot{\tilde{\alpha}}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{\eta}}} + mgL \begin{bmatrix} \text{\_ \_ \_ \_} & \text{\_ \_ \_ \_} \\ \text{\_ \_ \_ \_} & \text{\_ \_ \_ \_} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \text{\_ \_ \_ \_} \\ \text{\_ \_ \_ \_} \end{bmatrix}.$$

c) Verwendet man anstelle der Winkel die horizontalen Auslenkungen $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ als verallgemeinerte Koordinaten, so erhält man für kleine Winkel die Beziehungen $\sin\alpha_1 = \frac{\hat{x}_1}{L} \approx \tilde{\alpha}_1$ und $\sin\alpha_2 = \frac{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}{L} \approx \tilde{\alpha}_2$, bzw.

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \end{bmatrix} \approx \underbrace{\frac{1}{L} \begin{bmatrix} \text{\_ \_ \_} & \text{\_ \_ \_} \\ \text{\_ \_ \_} & \text{\_ \_ \_} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{\eta}}}.$$



d) Führen Sie eine Kongruenztransformation auf die neuen Koordinaten $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ durch.

$$\underbrace{m \begin{bmatrix} \text{\_ \_ \_ \_} & \text{\_ \_ \_ \_} \\ \text{\_ \_ \_ \_} & \text{\_ \_ \_ \_} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}} \cdot \ddot{\hat{\boldsymbol{\eta}}} + \underbrace{\frac{mg}{L} \begin{bmatrix} \text{\_ \_ \_ \_} & \text{\_ \_ \_ \_} \\ \text{\_ \_ \_ \_} & \text{\_ \_ \_ \_} \end{bmatrix}}_{\text{\_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_}} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{0}$$

e) Ändern sich dadurch die Eigenfrequenzen des Doppelpendels? _ _ _ _ _ _