Nichtlineare und Lineare Bewegungsgleichungen holonomer Mehrkörpersysteme

Aufgabe 1

Benennen Sie die folgenden Gleichungen, Matrizen und Vektoren. Erklären Sie die Zusammenhänge und die angewandten Prinzipe der Mechanik.

$$\boxed{\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{g}}$$

$$\bar{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \bar{\mathbf{J}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \overbrace{\bar{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{q}}^{c}} = \overbrace{\bar{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{q}}^{e}} + \overbrace{\bar{\mathbf{Q}}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{g}$$

$$\boxed{\bar{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \bar{\mathbf{J}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{q}}^{c} = \bar{\mathbf{q}}^{e} + \bar{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{g}}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} m_1\mathbf{E} & \mathbf{0} & & & \\ \mathbf{0} & m_2\mathbf{E} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & \dots \end{bmatrix}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{T1} \\ \mathbf{J}_{T2} \\ \dots \\ \mathbf{J}_{R1} \\ \dots \end{bmatrix}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \overbrace{\begin{bmatrix} m_1\bar{\mathbf{a}}_1 \\ m_2\bar{\mathbf{a}}_2 \\ \dots \\ \mathbf{I}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \cdot \mathbf{I}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 \\ \dots \end{bmatrix}} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{e} \\ \mathbf{f}_2^{e} \\ \dots \\ \mathbf{l}_1^{e} \\ \dots \end{bmatrix}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T1} \\ \mathbf{F}_{T2} \\ \dots \\ \mathbf{F}_{R1} \\ \dots \end{bmatrix}} \cdot \mathbf{g}$$

$$\underbrace{\bar{\mathbf{J}}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \bar{\mathbf{J}}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\bar{\mathbf{J}}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\mathbf{q}}^{c}} = \underbrace{\bar{\mathbf{J}}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\mathbf{q}}^{e}} + \bar{\mathbf{J}}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{g}$$

$$\boxed{\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k} = \mathbf{q}}$$

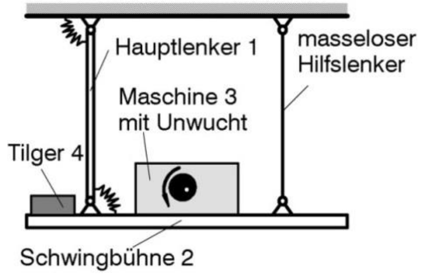
$$\underbrace{\mathbf{M}(\mathbf{y}_s, t)} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\left.\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_s - \left.\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_s \right)} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\left.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}}\right|_s \cdot \ddot{\mathbf{y}}_s + \left.\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{y}}\right|_s - \left.\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{y}}\right|_s \right)} \cdot \boldsymbol{\eta} = \underbrace{\mathbf{q}(\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s, t) - \mathbf{k}(\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s, t) - \mathbf{M}(\mathbf{y}_s, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_s}$$

$$\boxed{\mathbf{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}}$$

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + (\overbrace{\mathbf{D}}^{\frac{1}{2}(\mathbf{P}+\mathbf{P}^{\mathrm{T}})} + \overbrace{\mathbf{G}}^{\frac{1}{2}(\mathbf{P}-\mathbf{P}^{\mathrm{T}})}) \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + (\overbrace{\mathbf{K}}^{\frac{1}{2}(\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})} + \overbrace{\mathbf{N}}^{\frac{1}{2}(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}$$

Aufgabe 2

Die Bewegungsgleichungen der Schwingbühne aus den Arbeitsblättern A7 und A10 sollen im Folgenden aufgestellt werden.



a) Stellen Sie zunächst die Newton-Eulerschen Gleichungen auf.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \overline{\mathbf{J}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{q}}^c} = \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{q}}^e} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^r \\ \mathbf{f}_2^r \\ \mathbf{f}_3^r \\ \mathbf{f}_4^r \\ \mathbf{l}_1^r \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{q}}^r}$$

b) Welchen Einfluss haben die Zwangskräfte $\overline{\mathbf{q}}^r$ des Systems auf die Bewegungsgleichungen? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

c) Wie lautet die transponierte globale Jacobi-Matrix?

$$\bar{\mathbf{J}}^T = \left[\quad \middle| \quad \middle| \quad \middle| \quad \middle| \quad \right]$$

d) Ermitteln Sie die nichtlineare Bewegungsgleichung für $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 := m$

$$\left[\quad \right] \cdot \left[\quad \right] + \left[\quad \right] = \left[\quad \right]$$

Aufgabe 3

Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen aus Aufgabe 2 sollen nun für kleine Auslenkungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen um die Gleichgewichtslage $\mathbf{y}_s = [0 \quad 0]$, $\dot{\mathbf{y}}_s = [0 \quad 0]$, $\ddot{\mathbf{y}}_s = [0 \quad 0]$ linearisiert werden. Es gilt $\mathbf{y} = \mathbf{y}_s + \boldsymbol{\eta}$, wobei $\boldsymbol{\eta}$ der Vektor der linearen verallgemeinerten Koordinaten darstellt. Der Einfluss der Unwucht auf die lageabhängigen Kräfte soll vernachlässigbar werden ($\varepsilon \ll 1$).

Hinweis: Im Allgemeinen lautet die lineare Form der oben dargestellten Bewegungsgleichungen:

$$\underbrace{\mathbf{M}(\mathbf{y}_s, t)}_{\mathbf{M}(t)} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\left.\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s} - \left.\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s} \right)}_{\mathbf{P}(t)} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\left.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_s + \left.\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s} - \left.\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s} \right)}_{\mathbf{Q}(t)} \cdot \boldsymbol{\eta} = \underbrace{\mathbf{q}(\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s, t) - \mathbf{k}(\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s, t) - \mathbf{M}(\mathbf{y}_s, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_s}_{\mathbf{h}(t)} .$$

a) Berechnen Sie die folgenden Terme.

$\mathbf{M}(\mathbf{y}_s, t) =$

$\mathbf{k}(\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s, t) =$

$\left.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}\right|_{\mathbf{y}_s} =$

$\left.\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s} =$

$\left.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s}\right|_{\mathbf{y}_s} =$

$\left.\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_s, \dot{\mathbf{y}}_s} =$

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}_S, \dot{\mathbf{y}}_S, t) =$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_S, \dot{\mathbf{y}}_S} =$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_S, \dot{\mathbf{y}}_S} =$$

b) Wie lauten die Matrix der geschwindigkeitsabhängigen Kräfte $\mathbf{P}$ und die Matrix der lageabhängigen Kräfte $\mathbf{Q}$?

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix}$$

c) Geben Sie die lineare Bewegungsgleichung mit der linearen Massenmatrix $\mathbf{M}$, der Dämpfung-Matrix $\mathbf{D}$, der Matrix der gyroskopischen Kräfte $\mathbf{G}$, der Steifigkeits-Matrix $\mathbf{K}$, der Matrix der nichtkonservativen Kräfte $\mathbf{N}$ sowie dem Erregervektor $\mathbf{h}$ an.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}$$

$$+ \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \right) \cdot \boldsymbol{\eta} = \underbrace{\begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}}$$