Kinematik gebundener Mehrkörpersysteme

Aufgabe 1

Benennen Sie die Kinematikbeschreibungen eines starren Körpers i, der in einem holonomen Mehrkörpersystemen gebunden ist.

Lage:

$$\mathbf{r}_i := \mathbf{r}_i(\mathbf{y}, t)$$

$$\mathbf{S}_i := \mathbf{S}_i(\mathbf{y}, t)$$

Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}_i := \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

1. $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i := \dot{\mathbf{S}}_i \cdot \mathbf{S}_i^T \xRightarrow{Rösselsprung} \boldsymbol{\omega}_i$
2. $\boldsymbol{\omega}_i$ aus der Anschauung

$$\Rightarrow \mathbf{v}_i = \mathbf{J}_{Ti} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_i$$

$$\boldsymbol{\omega}_i := \mathbf{J}_{Ri} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i$$

Beschleunigung:

$$\mathbf{a}_i := \mathbf{J}_{Ti} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\dot{\mathbf{J}}_{Ti} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_i}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}_i = \mathbf{J}_{Ti} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{a}}_i$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i := \mathbf{J}_{Ri} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\dot{\mathbf{J}}_{Ri} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{J}_{Ri} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i$$

Aufgabe 2

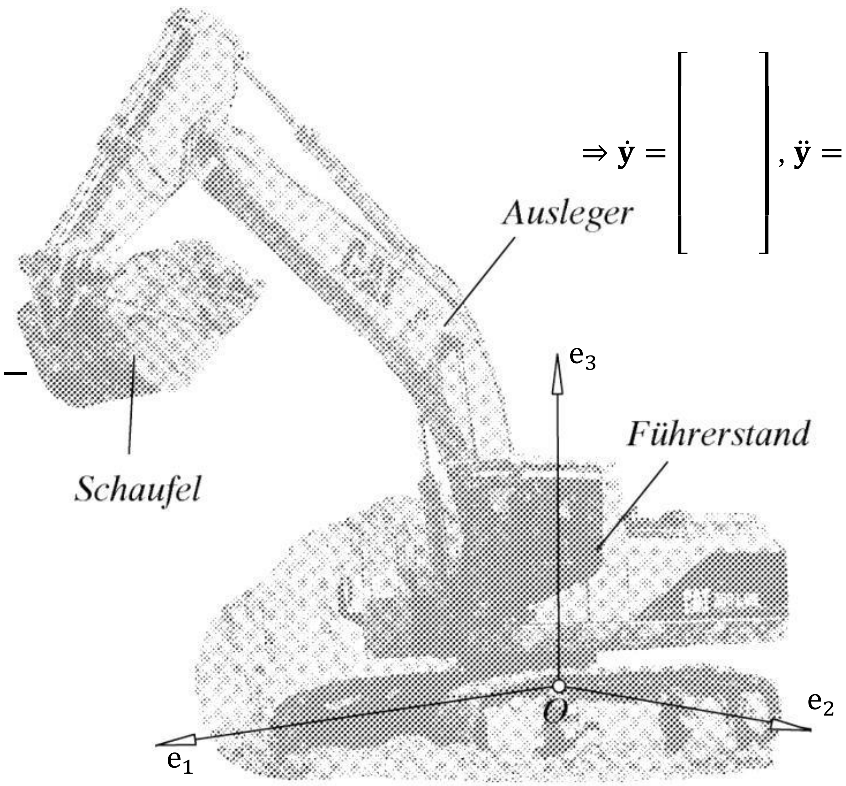
Ein stehender Schaufelbagger mit elastischen Hydraulikzylindern soll als starres Mehrkörpersystems modelliert werden.

a) Bestimmen Sie den Freiheitsgrad, geben Sie einen Satz verallgemeinerter Koordinaten an und zeichnen Sie diese in die Zeichnung ein.

$f =$ ___

$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$



b) Beschreiben Sie aus der Anschauung die Winkelgeschwindigkeiten folgender Körper im Inertialsystem $\mathrm{K}\{0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$ und bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen der Rotationen durch Koeffizienten-Vergleich.

Führerstand:

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \overset{!}{=} \mathbf{J}_\mathrm{RF} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{F} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} + \mathbf{0}$$

Ausleger:

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & 0 \\ & & \_\_ \\ & & 0 \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_ \\ 0 & 0 & 1 \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_\mathrm{RA}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{A}}$$

Schaufel:

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} + \_\_ \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \end{bmatrix} + \_\_\_\_\_ \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \end{bmatrix} + \_\_\_\_\_\_\_ \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} + \_\_\_ \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_ \\ \_\_ \\ 0 \\ \_\_ \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_\mathrm{RS}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{S}$$

c) Wie ändern sich die Winkelgeschwindigkeiten, falls die Drehrichtung des Führerstands und der Winkel zwischen Ausleger 1&2 entgegengesetzt angenommen wären?

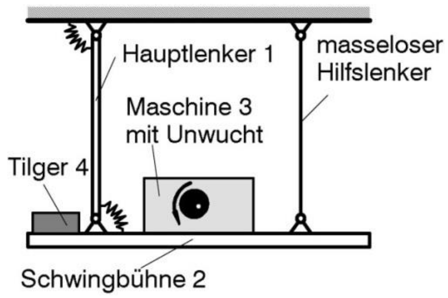
$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_\_ \\ 0 \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ \_\_\_ \\ 0 \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & 0 \\ & & \_\_ \\ & & 0 \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_ \\ 0 & 0 & 1 \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

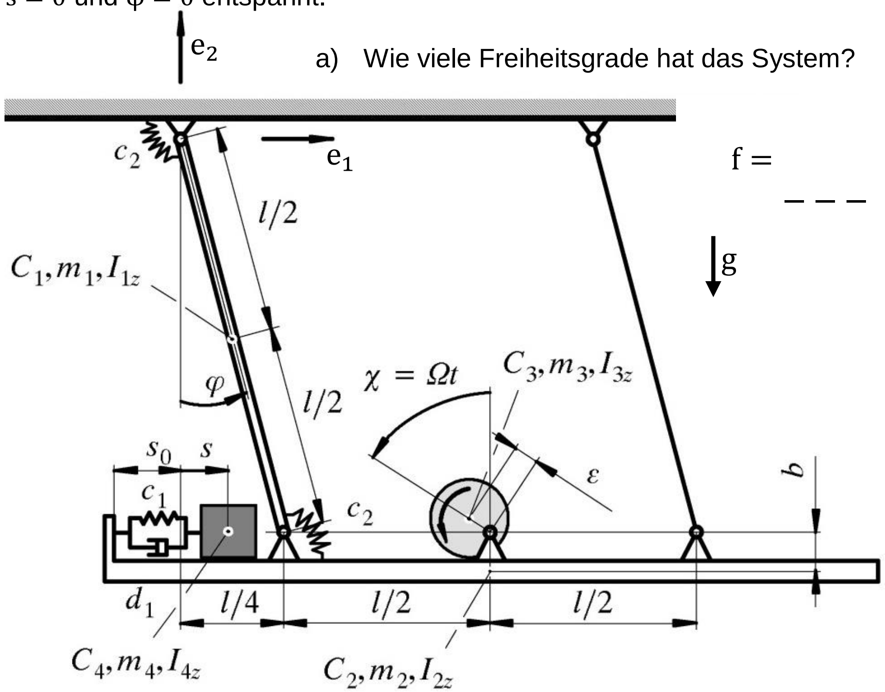
$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{S} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3

Eine Schwingbühne ist über einen Hauptlenker an der Decke befestigt und mit einem masselosen Hilfslenker gegen Kippen gesichert. Die Schwingbühne kann ebene Bewegungen ausführen. Auf der Schwingbühne befinden sich eine Maschine mit umlaufender Unwucht ($\Omega = \mathrm{const.}$) und ein Schwingungstilger.



Die Schwingbühne wird als Mehrkörpersystem modelliert. Die Federn sind für $s = 0$ und $\varphi = 0$ entspannt.



a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

f = ___

b) Welcher Lagevektor eignet sich zur Beschreibung des Mehrkörper systems?

○ $\mathbf{y} = [\varphi]$ ○ $\mathbf{y} = [\varphi\ s]$
○ $\mathbf{y} = [\varphi\ \chi]$ ○ $\mathbf{y} = [\varphi\ \chi\ s]$

c) Geben Sie die Ortsvektoren zu den Massenmittelpunkten, die Drehmatrizen, die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen für die einzelnen Körper an:

Hauptlenker:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T1}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_1$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{J}_{T1} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_1}_{}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R1}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_1}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{J}_{R1} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_1}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1}$$

Schwingbühne:

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \qquad \\ \qquad \\ \qquad \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T2}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{J}_{T2} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_2}_{}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} -l\,\dot{\varphi}^2 \sin\varphi \\ l\,\dot{\varphi}^2 \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R2}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_2}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{J}_{R2} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_2}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_2}$$

Maschine mit Unwucht:

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T3}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}_3}$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{J}_{T3} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = \begin{bmatrix} -l\,\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + \varepsilon\,\Omega^2 \sin(\Omega t) \\ l\,\dot{\varphi}^2 \cos\varphi - \varepsilon\,\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R3}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_3}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \underline{\quad\quad}$$

Tilger:

$$\mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{T4}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}_4}$$

$$\mathbf{a}_4 = \mathbf{J}_{T4} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_4}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_4 = \begin{bmatrix} -l\,\dot{\varphi}^2 \sin\varphi \\ l\,\dot{\varphi}^2 \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_4 = \underline{\quad\quad} \qquad \bar{\boldsymbol{\omega}}_4 = \underline{\quad\quad} \qquad \boldsymbol{\alpha}_4 = \underline{\quad\quad} \qquad \bar{\boldsymbol{\alpha}}_4 = \underline{\quad\quad}$$