Drehmatrix und Winkelgeschwindigkeit

Aufgabe 1

a) Vervollständigen Sie die Matrizen der Elementardrehungen bei Kardan-Winkeln.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \_\_\_ & \_\_\_ \\ 0 & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} \_\_\_ & 0 & \_\_\_ \\ 0 & 1 & 0 \\ \_\_\_ & 0 & \_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_3 = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & 0 \\ \_\_\_ & \_\_\_ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

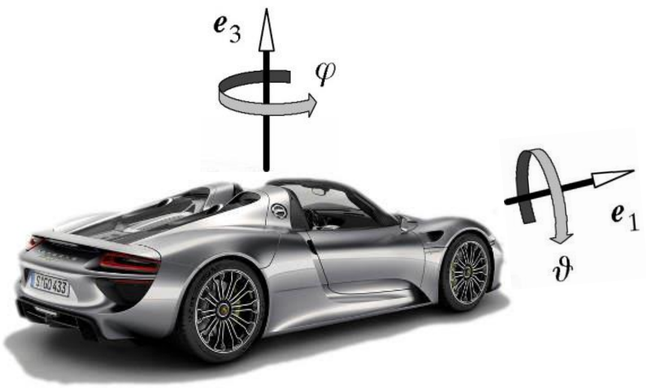
b) Wie berechnet sich der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{R}$ im körperfesten Referenzsystem, wenn er im Innertialsystem mit $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{I}$ gegeben ist?

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{I} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{R} = \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_ \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \_\_\_\_ \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2

Die Verdrehung eines fahrzeugfesten Koordinatensystems R aufgrund seiner Gier- und Wankbewegung gegenüber dem Inertialsystem I lässt sich durch 2 aufeinander folgende Elementardrehungen beschreiben. Die Gierbewegung ist eine Drehung um die vertikale Achse mit dem Winkel φ, die Wankbewegung eine anschließende Drehung um die Längsachse mit dem Winkel ϑ.



a) Berechnen Sie die Drehmatrix $\mathbf{S}$.

$$\mathbf{S} = \_\_\_\_\_\_ = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie den Winkelgeschwindigkeitsvektor des Fahrzeugs im Inertialsystem und im körperfesten Koordinatensystem aus der Anschauung:

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \_\_\_\_\_\_ \cdot \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{R} = \_\_\_\_\_\_ \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

c) Berechnen Sie nun den Drehgeschwindigkeitstensor formal und vergleichen Sie damit Ihr obiges Ergebnis.

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{I} = \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}^\mathrm{T} =$$

$$\begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_\mathrm{I} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

d) Welcher Rechenweg ist schneller?

◯ Anschauung b) ◯ formale Rechnung c)

e) Welche Regeln gelten für die Transformation von Vektoren?

◯ $\mathbf{a}_\mathrm{I} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}_\mathrm{R}$ ◯ $\mathbf{a}_\mathrm{I} = \mathbf{S}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{a}_\mathrm{R}$

◯ $\mathbf{a}_\mathrm{R} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}_\mathrm{I}$ ◯ $\mathbf{a}_\mathrm{R} = \mathbf{S}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{a}_\mathrm{I}$

f) Transformieren Sie $\boldsymbol{\omega}_R$ in das Inertialsystem und überprüfen Sie nochmals Ihre Ergebnisse.

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{I}} = \underset{\_\_\_\_}{} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \sin\varphi & \cos\varphi\cos\vartheta & -\cos\varphi\sin\vartheta \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

g) Wie lauten die Regeln zur Transformation eines Tensors zweiter Stufe $\mathbf{A}$?

- ◯ $\mathbf{A}_{\mathrm{I}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{R}}$
- ◯ $\mathbf{A}_{\mathrm{I}} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{S}$
- ◯ $\mathbf{A}_{\mathrm{I}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{T}}$
- ◯ $\mathbf{A}_{\mathrm{R}} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{S}$

Bonus-Aufgabenteile:

h) Das körperfeste Koordinatensystem R sei ein Hauptachsensystem, so dass der Trägheitstensor Diagonalform hat

$$\mathbf{I}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{C} \end{bmatrix}.$$

Führen Sie mit geeigneten Abkürzungen für die trigonometrischen Funktionen ($\mathrm{s}_\varphi \coloneqq \sin\varphi$, $\mathrm{c}_\varphi \coloneqq \cos\varphi$, etc.) eine Transformation des Trägheitstensors in das Inertialsystem durch

$$\mathbf{I}_{\mathrm{I}} = \underset{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{} = \begin{bmatrix} \begin{array}{c} \mathrm{A}\,\mathrm{c}_\varphi^2 \\ +\mathrm{B}\,\mathrm{s}_\varphi^2 \mathrm{c}_\vartheta^2 \\ +\mathrm{C}\,\mathrm{s}_\varphi^2 \mathrm{s}_\vartheta^2 \end{array} & \begin{array}{c} \mathrm{A}\,\mathrm{s}_\varphi\,\mathrm{c}_\varphi \\ -\mathrm{B}\,\mathrm{s}_\varphi\,\mathrm{c}_\varphi\,\mathrm{c}_\vartheta^2 \\ -\mathrm{C}\,\mathrm{s}_\varphi\,\mathrm{c}_\varphi\,\mathrm{s}_\vartheta^2 \end{array} & (\mathrm{C}-\mathrm{B})\mathrm{s}_\varphi\,\mathrm{c}_\vartheta\,\mathrm{s}_\vartheta \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \begin{array}{c} \mathrm{A}\,\mathrm{s}_\varphi^2 \\ +\mathrm{B}\,\mathrm{c}_\varphi^2 \mathrm{c}_\vartheta^2 \\ +\mathrm{C}\,\mathrm{c}_\varphi^2 \mathrm{s}_\vartheta^2 \end{array} & (\mathrm{B}-\mathrm{C})\mathrm{c}_\varphi\,\mathrm{s}_\vartheta\,\mathrm{c}_\vartheta \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_ & \mathrm{B}\,\mathrm{s}_\varphi^2 + \mathrm{C}\,\mathrm{c}_\vartheta^2 \end{bmatrix}$$