Kinematik eines Massenpunktes

Ein freier Massenpunkt P kann im dreidimensionalen Raum durch die kartesischen Koordinaten seines Ortsvektors beschrieben werden. Im raumfesten Koordinatensystem $\{0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ erhält man $\mathbf{r}(\mathrm{t}) = \mathrm{r}_1(\mathrm{t})\,\mathbf{e}_1 + \mathrm{r}_2(\mathrm{t})\,\mathbf{e}_2 + \mathrm{r}_3(\mathrm{t})\,\mathbf{e}_3 = [\mathrm{r}_1(\mathrm{t})\;\; \mathrm{r}_2(\mathrm{t})\;\; \mathrm{r}_3(\mathrm{t})]$.
Andererseits kann die Lage des Massenpunkts auch mittels krummliniger bzw. verallgemeinerter Koordinaten $\mathbf{x}(\mathrm{t})$ beschrieben werden. Zwischen dem **Orts**vektor $\mathbf{r}(\mathrm{t})$ und dem **Lage**vektor $\mathbf{x}(\mathrm{t})$ besteht dann ein i.a. nichtlinearer Zusammenhang $\mathbf{r}(\mathbf{x}(\mathrm{t}))$.

Die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Massenpunktes lässt sich auf zwei unterschiedliche Arten bestimmen:

1. **Direkte Differentiation der Koordinaten des Ortsvektors $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ nach der Zeit**

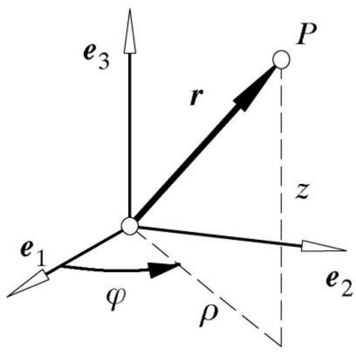
$$\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{dt}} \quad , \qquad\qquad \mathbf{a}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{dt}^2}$$

2. **Differentiation des Ortsvektors $\mathbf{r}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ als Funktion der krummlinigen Koordinaten nach der Zeit unter Anwendung der Kettenregel**

$$\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{dt}} = \mathbf{H}_\mathrm{T} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad , \qquad\qquad \mathbf{a}(\mathrm{t}) = \mathbf{H}_\mathrm{T} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{H}}_\mathrm{T} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

Aufgabe 1

a) Beschreiben Sie die Lage des Massenpunkts mit den Zylinderkoordinaten $\mathbf{x}(\mathrm{t}) = [\rho\;\; \varphi\;\; \mathrm{z}]$.



$$\mathbf{r}(\mathbf{x}(\mathrm{t})) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Massenpunkts mit der zweiten Methode.

$$\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\mathrm{z}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}(\mathrm{t}) = \mathbf{H}_\mathrm{T} \cdot \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{a}}}$$