Matrizenalgebra und Matrizenanalysis

Aufgabe 1

Bilden Sie mit den Vektoren und Matrizen

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ folgende Produkte und Größen:

Skalarprodukt $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b} =$ --------

Dyadisches Produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^{\mathrm{T}} =$ --------

Quadratische Form $\mathbf{a}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} =$ --------

Determinante $\det \mathbf{A} =$ --------

Adjungierte $\operatorname{adj} \mathbf{A} =$ --------

Inverse $\mathbf{A}^{-1} =$ --------

Aufgabe 2

a) Mit welchen Kriterien lässt sich die Definitheit einer Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ und den Hauptminoren/Hauptabschnittsdeterminaten $H_1, H_2, \dots, H_n$ bestimmen?

	Definition für Quadratische Form	**Eigenwerte** $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$	**Hauptminoren**/ Hauptabschnitts-determinaten $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & & \dots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$
positiv definit	$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} > 0$ $\forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$		
positiv semidefinit	$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ $\forall\, \mathbf{x}$		
negativ definit	$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} < 0$ $\forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$		
negativ semidefinit	$\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq 0$ $\forall\, \mathbf{x}$		
Indefinit	sonst		

b) Bestimmen Sie die Definitheit der folgenden Matrizen:

	a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$	c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$	d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
positiv definit	☐	☐	☐	☐
positiv semidefinit	☐	☐	☐	☐
negativ definit	☐	☐	☐	☐
negativ semidefinit	☐	☐	☐	☐
indefinit	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 3

Die Matrix $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ beschreibt eine pos. Drehung um die z−Achse.

a) Wie berechnet sich die Inverse einer orthogonalen Matrix $\mathbf{A}$? $\mathbf{A}^{-1} =$ ______

b) Berechnen Sie die Determinante der Drehmatrix.

$\det(\mathbf{S}) =$ ____________________________________ $=$ ______

c) Bestimmen Sie $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ und das Produkt $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}$ mit $\mathbf{r} = [a,\ b,\ 0]$.

d) Wie lautet $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ bei einer Drehung mit dem Vektor der Winkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$?

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Bonus-Aufgabenteile:

e) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{S}$ orthogonal ist.

f) Zeigen Sie, dass das Produkt $\dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ für jede beliebige orthogonale Matrix $\boldsymbol{S}$ schiefsymmetrisch ist. (Hinweis: Verwenden Sie die Definition $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$ der Orthogonalität.)