S2_loes Seite 1

Donnerstag, 22. Dezember 2016 11:00

Maschinendynamik Seminar 2

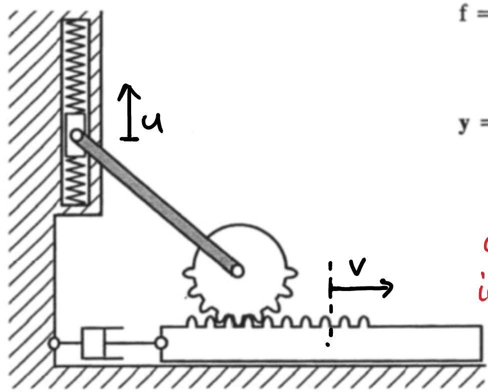
1. Die Aufgabenblätter umfassen 4 Aufgaben auf 8 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
5. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Die Musterlösungen zu diesen Aufgaben können im Anschluss an das Seminar unter
http://www.itm.uni-stuttgart.de/courses/madyn/madyn_de.php
eingesehen werden.

Aufgabe 1

Geben Sie für folgende Systeme jeweils die Zahl der Freiheitsgrade und geeignete verallgemeinerte Koordinaten an. Tragen Sie die Koordinaten in die Zeichnung ein und benennen Sie diese.

a) Ebener Mechanismus (Annahme: Zahnrad hat stets Kontakt zur Zahnstange)

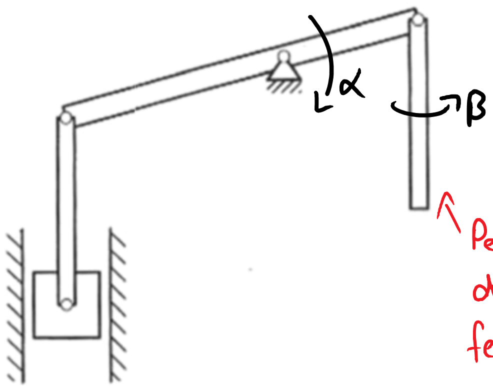


f = 2,

y = [u v]^T.

Mit wie vielen Händen oder Fingern muss man in wie viele Richtungen/Gelenke festhalten?

b) Ebenes Kipphebelgestänge



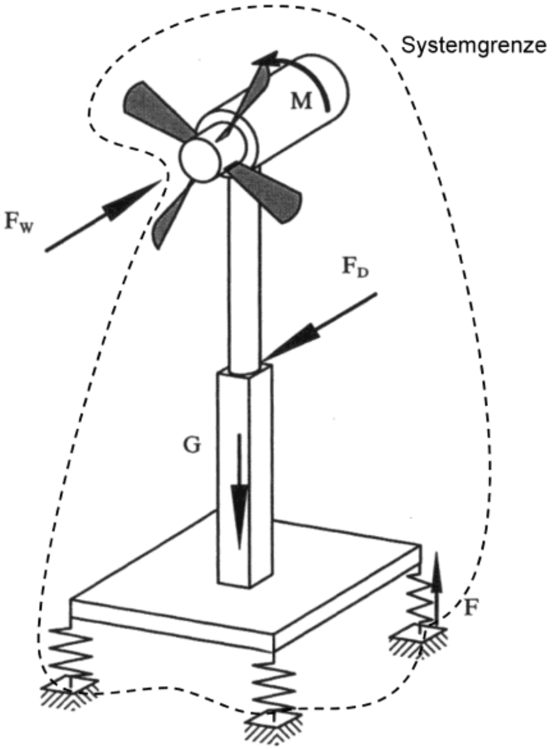
f = 2,

y = [α β].

Pendel schwingt, auch wenn man die Masse oder das Gelenk festhält

Aufgabe 2

Die Fußplatte einer Windturbine ist elastisch gelagert. Die Turbine ist um die Hochachse drehbar.



Klassifizieren Sie die eingetragenen Kräfte und Momente.

Windkraft könnte lage-, geschw.- und beschleunigungsabh. sein

äußerer Ursprung

	äußere Kraft/Moment	innere Kraft/Moment	eingeprägte Kraft/Moment	Reaktionskraft/Moment	P−Kraft/Moment	PD−Kraft/Moment	PID−Kraft/Moment
Gewicht G der Windturbine	X		X		X		
Windkraft F_W	X		X				
Kraft F_D im Drehgelenk		X		X	—	—	—
Aufstandskraft F	X		X		X		
Schnittmoment M in der Rotorwelle		X		X			

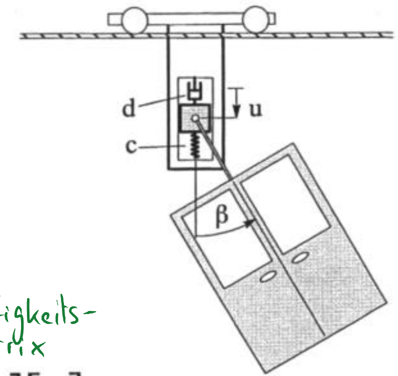
gehorchen einem Kraftgesetz

Lagerkräfte

Reaktionskräfte lassen sich nicht in P-PID-Kräfte charakterisieren

Aufgabe 3 (21 Punkte)

Die Bewegung einer Seilbahngondel, bestehend aus dem Gondelager und der Kabine soll auf Stabilität und Eigenschwingungsverhalten untersucht werden.



Die linearen Bewegungsgleichungen lauten in Abhängigkeit der Steifigkeit c und der Dämpfung d des Lagers:

lineare Massenmatrix, Dämpfungs-matrix, Steifigkeits-matrix

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}}\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{K}}}\begin{bmatrix} u \\ \beta \end{bmatrix} = \mathbf{h}(t).$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} u \\ \beta \end{bmatrix}$$

a) Geben Sie die Zahl der Freiheitsgrade und die Dimension des Zustandsvektors an.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \underline{\dot{y}} \end{bmatrix}$$

f = 2 , n = 4 . = 2f

b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom. A17 M20

$p(\lambda) = (\lambda^2 + d\lambda + c)(\lambda^2 + 5)$ (1)

$= \lambda^4 + d\lambda^3 + (5+c)\lambda^2 + 5d\lambda + 5c$

c) Wie lauten die charakteristischen Koeffizienten?

- ☐ $a_1 = -d$, $a_2 = c$, $a_3 = -5d$, $a_4 = 5c$,
- ☒ $a_1 = d$, $a_2 = 5+c$, $a_3 = 5d$, $a_4 = 5c$,
- ☐ $a_1 = -d$, $a_2 = 5+c$, $a_3 = 5d$, $a_4 = c+d$.

2. Klammer = 0 1. Klammer = 0

(1): $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \ldots \quad \lambda_{3/4} = \ldots$

d) Geben Sie die fehlenden Eigenwerte der Seilbahngondel an.

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{5}\,i$, $\lambda_{3,4} = \dfrac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4c}}{2}$.

Eigenkreisfrequenz $\omega = \mathrm{Im}(\lambda)$ $= -\frac{d}{2} \pm i\sqrt{c - \frac{d^2}{4}}$

e) Welche Stabilitätsaussage ist nach dem Eigenwertkriterium korrekt? Das System ist

Abklingkoeff. $\delta = \mathrm{Re}(\lambda)$ Eigenkreisfreq. $\omega = \mathrm{Im}(\lambda)$

M19

- ☐ asymptotisch stabil,
- ☒ grenzstabil,
- ☐ instabil,
- ☐ keine Aussage möglich.

da $\mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) = 0$

f) Wie lauten die Eigenfrequenzen des Systems für $4c \geq d^2$?

$\omega_1 = \sqrt{5}$, $\omega_2 = \sqrt{c - d^2/4}$.

g) Geben Sie die zugehörigen Eigenvektoren an.

$$\tilde{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_{1/2}$ u. $\lambda_{3/4}$ in Matrix einsetzen und LGS lösen:

$$[\underline{\underline{M}}\lambda_{1/2}^2 + \underline{\underline{D}}\lambda_{1/2} + \underline{\underline{K}}]\,\underline{\tilde{y}}_1 = \underline{0}$$

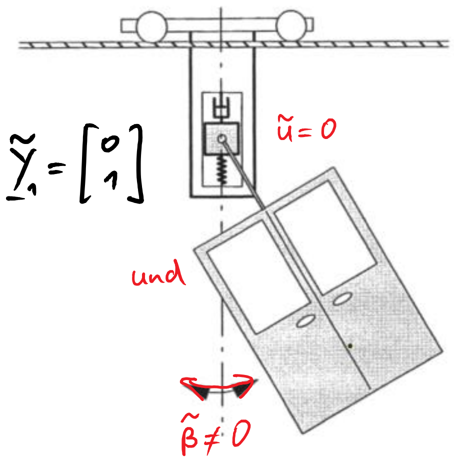
$$[\underline{\underline{M}}\lambda_{3/4}^2 + \underline{\underline{D}}\lambda_{3/4} + \underline{\underline{K}}]\,\underline{\tilde{y}}_2 = \underline{0}$$

$q(\lambda) = \det(\underline{\underline{M}}\lambda^2 + \underline{\underline{D}}\lambda + \underline{\underline{K}})$

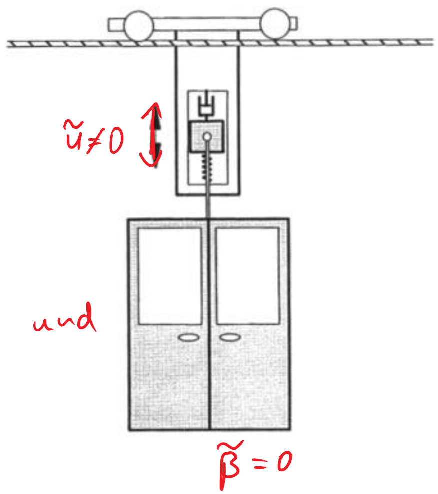
$p(\lambda) = \dfrac{1}{\det \underline{\underline{M}}} \det(\underline{\underline{M}}\lambda^2 + \underline{\underline{D}}\lambda + \underline{\underline{K}})$

$= \dfrac{1}{1} \det\begin{pmatrix} \lambda^2 + d\lambda + c & 0 \\ 0 & \lambda^2 + 5 \end{pmatrix}$

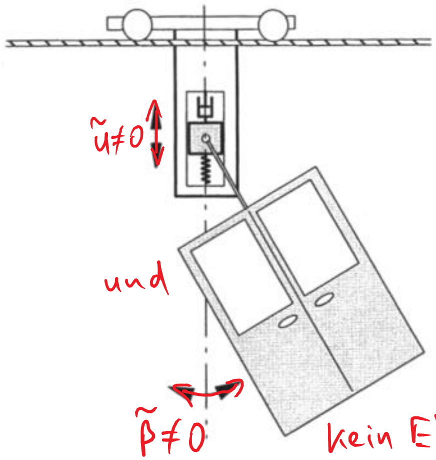
h) Ordnen Sie folgende Schwingungsformen den Eigenvektoren zu.



- ☒ 1. Eigenform
- ☐ 2. Eigenform
- ☐ keine Eigenform



- ☐ 1. Eigenform
- ☒ 2. Eigenform
- ☐ keine Eigenform



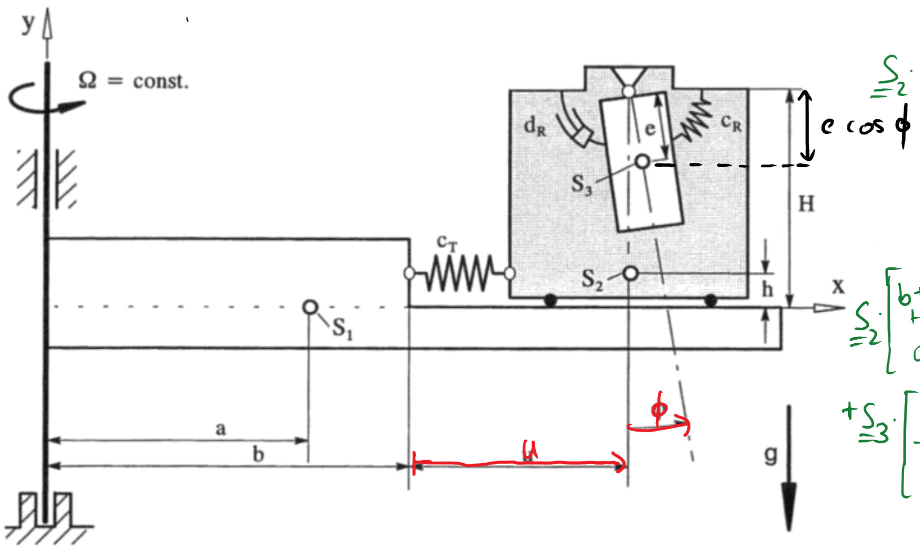
- ☐ 1. Eigenform
- ☐ 2. Eigenform
- ☒ keine Eigenforn

kein EV
(auch bezeichnet
als Eigenform
oder Eigenmode)

Aufgabe 4 (34 Punkte)

Die Bewegung einer Trainingszentrifuge für Astronauten soll untersucht werden. Der Zentrifugenarm (Masse m_1) dreht sich mit der konstanten Drehgeschwindigkeit Ω um die y−Achse. Entlang des Arms kann sich der Schlitten (Masse m_2) reibungsfrei in radialer Richtung translatorisch bewegen. Zwischen Schlitten und Arm befindet sich eine Feder (Steifigkeit c_T). Die Astronautenkapsel (Masse m_3, Trägheitsmomente I_x, I_y, I_z) kann im Schlitten in radialer Richtung pendeln (Drehfeder c_R, Drehdämpfer d_R).

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ liegt der Schwerpunkt des Zentrifugenarms auf der x−Achse.



Hinweis: Die Aufgabe kann auch mit Aufgabenteil j) begonnen werden.

a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

$f = 2$.

b) Welcher Lagevektor eignet sich zur Beschreibung des Mehrkörpersystems?

- ☐ $y = [\Omega]$
- ☒ $y = [u \quad \phi]^T$
- ☐ $y = [e \quad u \quad \phi]^T$
- ☐ $y = [b \quad \phi]^T$

c) Geben Sie die Ortsvektoren zu den Massenmittelpunkten sowie die Drehmatrizen von Zentrifugenarm, Schlitten und Kapsel an.

Zentrifugenarm:

pos. Elementardrehung um y-Achse

$$\underline{\underline{S}}_1 \cdot \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} a\cos\Omega t \\ 0 \\ -a\sin\Omega t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & 0 & \sin\Omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Omega t & 0 & \cos\Omega t \end{bmatrix},$$

Schlitten:

$$\underline{\underline{S}}_2 \cdot \begin{bmatrix} b+u \\ h \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} (b+u)\cos\Omega t \\ h \\ -(b+u)\sin\Omega t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & 0 & \sin\Omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Omega t & 0 & \cos\Omega t \end{bmatrix}, = \underline{\underline{S}}_1$$

Kapsel:

$$\underline{\underline{S}}_2 \cdot \begin{bmatrix} b+u \\ H \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{\underline{S}}_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -e \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} (b+u+e\sin\phi)\cos\Omega t \\ H - e\cos\phi \\ -(b+u+e\sin\phi)\sin\Omega t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\Omega t & -\sin\phi\cos\Omega t & \sin\Omega t \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ -\cos\phi\sin\Omega t & \sin\phi\sin\Omega t & \cos\Omega t \end{bmatrix}. = \underline{\underline{S}}_2 \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Geben Sie die folgenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen an.

Zentrifugenarm:

$$\mathbf{v}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{J}}_{r_1} = \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial \underline{y}}} \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -a\Omega\sin(\Omega t) \\ 0 \\ -a\Omega\cos(\Omega t) \end{bmatrix}}_{\bar{\underline{v}}_1 = \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial t}},$$

$\underline{a}_1 = \dot{\underline{\underline{J}}}_{T1} \cdot \dot{\underline{y}} + \dot{\underline{v}}_1$ (lok. Beschl.)

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{J}_{T1}\,\ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} -a\Omega^2 \cos\Omega t \\ 0 \\ a\Omega^2 \sin\Omega t \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\underline{\underline{J}}_{R1}$ $\qquad$ $\underline{\omega}_1$

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{J}_{R1}\,\ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\underline{\alpha}_1 = \dot{\underline{\underline{J}}}_{R1} \cdot \dot{\underline{y}} + \dot{\underline{\omega}}_1$

Schlitten:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sin\Omega t & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} -(b+u)\Omega \sin\Omega t \\ 0 \\ -(b+u)\Omega\cos\Omega t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{J}_{T2}\,\ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} -2\dot{u}\Omega \sin\Omega t - (b+u)\Omega^2 \cos\Omega t \\ 0 \\ -2\dot{u}\Omega\cos\Omega t + (b+u)\Omega^2 \sin\Omega t \end{bmatrix},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\Omega\sin\Omega t & 0 \\ 0 & 0 \\ -\Omega\cos\Omega t & 0 \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{\underline{J}}}_{T2} = \frac{d\underline{\underline{J}}_{T2}}{dt}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\dot{u}\Omega\sin\Omega t - (b+u)\Omega^2\cos\Omega t \\ 0 \\ -\dot{u}\Omega\cos\Omega t + (b+u)\Omega^2\sin\Omega t \end{bmatrix}}_{\dot{\bar{\underline{v}}}_2 = \frac{d\bar{\underline{v}}_2}{dt}}.$$

Kapsel:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & e\cos\phi\cos\Omega t \\ 0 & e\sin\phi \\ -\sin\Omega t & -e\cos\phi\sin\Omega t \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_3,$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sin\Omega t \\ 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega t \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix}.$$

e) Wie groß ist ~~die auf den Schlitten wirkende Kraft der Feder~~ der Betrag der Federkraft zwischen Zentrifugenarm und Schlitten? (Die Feder ist für $u = u_0$ ungespannt.)

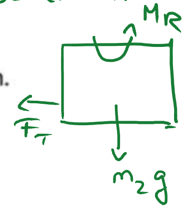
$F_T = \left| (-)c_T\,(u - u_0) \right|.$

f) Wie groß ist ~~das auf den Schlitten wirkende Moment~~ der Betrag des Moments zwischen Schlitten und Kapsel? (Die Drehfeder ist für $\phi = 0$ ungespannt.)

$M_R = \left| c_R\,\phi + d_R\,\dot{\phi} \right|.$

g) Bestimmen Sie die eingeprägten Kräfte und Momente auf den Schlitten.

Freischnitt Schlitten:



$$\mathbf{f}_2^e = \begin{bmatrix} -c_T(u-u_0)\cos\Omega t \\ -m_2 g \\ c_T(u-u_0)\sin\Omega t \end{bmatrix}, = \underline{\underline{S}}_1 \cdot \begin{bmatrix} -c_T(u-u_0) \\ -m_2 g \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{l}_2^e = \begin{bmatrix} (c_R\phi + d_R\dot{\phi})\sin\Omega t \\ 0 \\ (c_R\phi + d_R\dot{\phi})\cos\Omega t \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_R\phi + d_R\dot{\phi} \end{bmatrix}$$

h) Weshalb werden die Newton–Eulerschen–Gleichungen des Zentrifugenarms zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen nicht benötigt?

Der Arm ist durch $\Omega =$ const. gebunden. (Arm hat keine Dynamik, bzw. Bewegung ändert sich nicht)

i) Ergänzen Sie die Newton–Eulerschen–Gleichungen für den Schlitten und die Kapsel.

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
m_2 \cos \Omega t & 0 \\
0 & 0 \\
-m_2 \sin \Omega t & 0 \\
\hline
m_3 \cos \Omega t & m_3 e \cos\phi \cos \Omega t \\
0 & m_3 e \sin\phi \\
-m_3 \sin \Omega t & -m_3 e \cos\phi \sin \Omega t \\
\hline
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
\hline
0 & I_z \sin \Omega t \\
0 & 0 \\
0 & I_z \cos \Omega t
\end{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}}_{\text{Trägheitskräfte } \underline{\underline{\bar{M}}} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\ddot{y}}}
+ \underbrace{\bar{\mathbf{q}}^c}_{\substack{\text{Vektor der} \\ \text{Coriolis- \& } \\ \text{Zentrifugalkräfte}}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
\mathbf{f}_2^e \\ \hline \mathbf{f}_3^e \\ \hline l_2^e \\ \hline l_3^e
\end{bmatrix}}_{\substack{\text{Vektor der} \\ \text{eingeprägten Kräfte}}}
+ \overline{\mathbf{Q}}\,\mathbf{g}
$$

$$
\bar{\mathbf{q}}^c = \begin{bmatrix}
m_2 \underline{\bar{a}}_2 \\ m_3 \underline{\bar{a}}_3 \\ \underline{\underline{I}}_2 \cdot \underline{\alpha}_2 + \underline{\underline{\tilde{\omega}}}_2 \cdot \underline{\underline{I}}_2 \cdot \underline{\omega}_2 \\ \underline{\underline{I}}_3 \cdot \underline{\alpha}_3 + \underline{\underline{\tilde{\omega}}}_3 \cdot \underline{\underline{I}}_3 \cdot \underline{\omega}_3
\end{bmatrix}
$$

$m_2 \underline{\underline{J}}_{T_2}$ — Impulssatz für Schlitten

$m_3 \underline{\underline{J}}_{T_3}$ — Impulssatz für Kapsel

$\underline{\underline{I}}_2 \cdot \underline{\underline{J}}_{R_2}$ — Drallsatz für Schlitten

$\underline{\underline{I}}_3 \cdot \underline{\underline{J}}_{R_3}$ — Drallsatz für Kapsel

Aus FS: $\underbrace{\underline{\underline{M}}(\underline{y}_s,t)}_{\underline{\underline{M}}} \cdot \ddot{\underline{\eta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{k}}{\partial \dot{\underline{y}}}\bigg|_{\underline{y}_s,\dot{\underline{y}}_s} - \frac{\partial \underline{g}}{\partial \dot{\underline{y}}}\bigg|_{\underline{y}_s,\dot{\underline{y}}_s} \right)}_{\underline{\underline{P}}} \cdot \dot{\underline{\eta}} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{\partial \underline{\underline{M}}}{\partial \underline{y}}\bigg|_{\underline{y}_s} \overset{0}{\ddot{\underline{y}}_s}} + \frac{\partial \underline{k}}{\partial \underline{y}}\bigg|_{\underline{y}_s,\dot{\underline{y}}_s} - \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{y}}\bigg|_{\underline{y}_s,\dot{\underline{y}}_s} \right)}_{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\eta} = \underbrace{\underline{q}(\underline{y}_s,\dot{\underline{y}}_s,t) - \underline{k}(\underline{y}_s,\dot{\underline{y}}_s,t) - \underline{\underline{M}}(\underline{y}_s,t)\cdot \cancel{\ddot{\underline{y}}_s}^{\,0}}_{\underline{h}}$

$\boxed{A13}$ $\boxed{A14}$

Das Aufstellen der Bewegungsgleichungen aus den Newton–Eulerschen–Gleichungen wurde mit einem Computerprogramm durchgeführt. Es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} m_2 + m_3 & m_3\, e\cos\phi \\ m_3\, e\cos\phi & I_z + m_3\, e^2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} -(m_2+m_3)(b+u)\Omega^2 - m_3\, e\sin\phi(\dot{\phi}^2 + \Omega^2) \\ (I_y - I_x)\ \Omega^2 \sin\phi\cos\phi - m_3\ e\ \Omega^2\cos\phi(e\sin\phi + b + u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_T\ (u_0 - u) \\ -m_3\ g\ e\sin\phi - c_R\phi - d_R\dot{\phi} \end{bmatrix}.$$

j) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen um die Lage $u = u_0$ und $\phi = 0$, und geben Sie die Matrizen $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{K}$ sowie den Erregervektor $\mathbf{h}(t)$ der linearisierten Bewegungsgleichungen an.

$\underline{y}_s = \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{y} = \underline{y}_s + \underline{\eta}$ $\quad \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}}^T)$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_2 + m_3 & m_3 e \\ m_3 e & I_z + m_3 e^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{0},$$

sym. sym.

$\underline{\underline{K}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}}^T)$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -(m_2+m_3)\Omega^2 + c_T & -m_3 e\Omega^2 \\ -m_3 e\Omega^2 & (I_y - I_x)\Omega^2 - m_3 e^2\Omega^2 + m_3 g e + c_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} (m_2+m_3)(b+u_0)\Omega^2 \\ m_3 e\Omega^2(b+u_0) \end{bmatrix}.$$

sym.

k) Sind die linearisierten Bewegungen voneinander entkoppelt?

Nein, da Nebendiagonalen von $\underline{\underline{M}}$ und $\underline{\underline{K}} \neq 0$.

ENDE