Institut für Technische und Num. Mechanik
Prof. Dr.-Ing. Prof. E.h. P. Eberhard   Dr.-Ing. F. Fleißner

Maschinendynamik Seminar 2

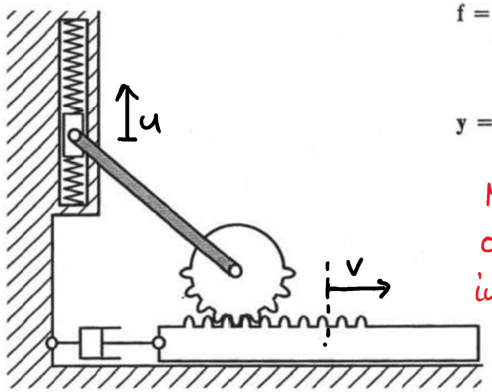
1. Die Aufgabenblätter umfassen 4 Aufgaben auf 8 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
5. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Die Musterlösungen zu diesen Aufgaben werden im Anschluss an das Seminar auf der Vorlesungshomepage bereitgestellt.

Aufgabe 1

Geben Sie für folgende Systeme jeweils die Zahl der Freiheitsgrade und geeignete verallgemeinerte Koordinaten an. Tragen Sie die Koordinaten in die Zeichnung ein und benennen Sie diese.

a) Ebener Mechanismus

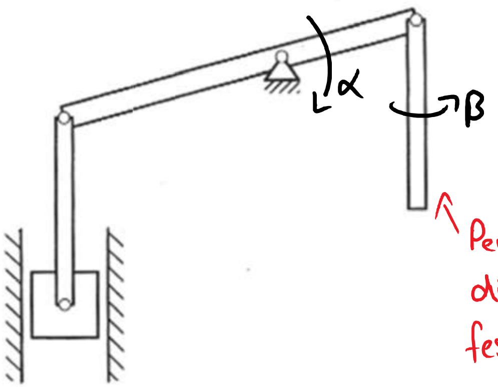


$f = 2$,

$y = [u \quad v]^T$.

Mit wie vielen Händen oder Fingern muss man in wie viele Richtungen/Gelenke festhalten?

b) Ebenes Kipphebelgestänge



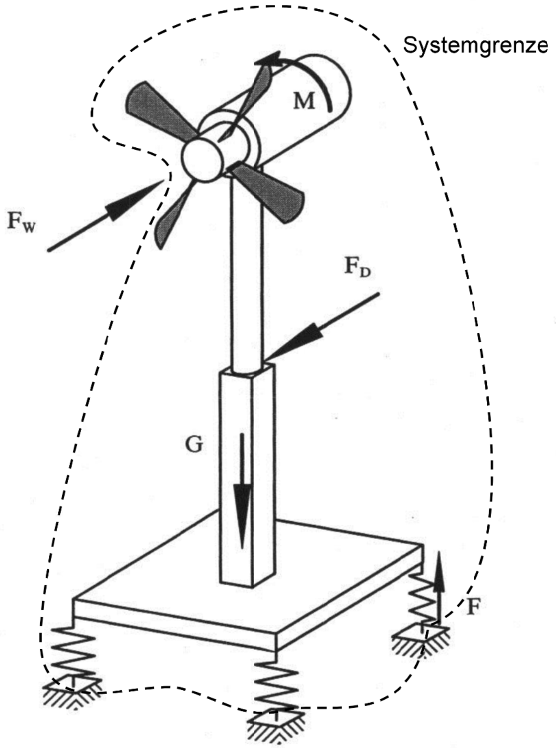
$f = 2$,

$y = [\alpha \quad \beta]$.

Pendel schwingt, auch wenn man die Masse oder das Gelenk festhält

Aufgabe 2

Die Fußplatte einer Windturbine ist elastisch gelagert. Die Turbine ist um die Hochachse drehbar.



Klassifizieren Sie die eingetragenen Kräfte und Momente.

Windkraft könnte lage-, geschw.- und beschleunigungsabh. sein

äußerer Ursprung

	äußere Kraft/Moment	innere Kraft/Moment	eingeprägte Kraft/Moment	Reaktionskraft/Moment	P–Kraft/Moment	PD–Kraft/Moment	PID–Kraft/Moment
Gewicht G der Windturbine	X		X		X		
Windkraft F_W	X		X				
Kraft F_D im Drehgelenk		X		X	—	—	—
Aufstandskraft F	X		X		X		
Schnittmoment M in der Rotorwelle		X		X			

gehorchen einem Kraftgesetz

Lagerkräfte

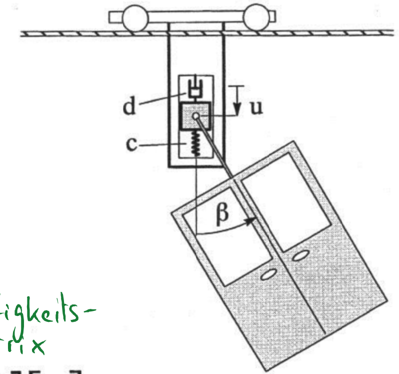
Reaktionskräfte lassen sich nicht in P-PID-Kräfte charakterisieren

2. Klammer = 0 1. Klammer = 0

(1): $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \dots \quad \lambda_{3/4} = \dots$

Aufgabe 3 (21 Punkte)

Die Bewegung einer Seilbahngondel, bestehend aus dem Gondellager und der Kabine soll auf Stabilität und Eigenschwingungsverhalten untersucht werden.



Die linearen Bewegungsgleichungen lauten in Abhängigkeit der Steifigkeit c und der Dämpfung d des Lagers:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}}_{\underline{M}\ \text{lineare Massenmatrix}}\begin{bmatrix}\ddot{u}\\\ddot{\beta}\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}d & 0\\0 & 0\end{bmatrix}}_{\underline{D}\ \text{Dämpfungsmatrix}}\begin{bmatrix}\dot{u}\\\dot{\beta}\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}c & 0\\0 & 5\end{bmatrix}}_{\underline{K}\ \text{Steifigkeitsmatrix}}\begin{bmatrix}u\\\beta\end{bmatrix}=\mathbf{h}(t)\,.$$

$\underline{y} = \begin{bmatrix}u\\\beta\end{bmatrix}$

a) Geben Sie die Zahl der Freiheitsgrade und die Dimension des Zustandsvektors an.

f = 2 , n = 4 $= 2f$ $\underline{x} = \begin{bmatrix}\underline{y}\\\dot{\underline{y}}\end{bmatrix}$

b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom. $\boxed{A17}$ $\boxed{M20}$

$p(\lambda) = (\lambda^2 + d\lambda + c)(\lambda^2 + 5)$ (1)

$= \lambda^2 + d\lambda^3 + (5+c)\lambda^2 + 5d\lambda + 5c$

c) Wie lauten die charakteristischen Koeffizienten?

- ☐ $a_1 = -d$, $a_2 = c$, $a_3 = -5d$, $a_4 = 5c$,
- ☒ $a_1 = d$, $a_2 = 5 + c$, $a_3 = 5d$, $a_4 = 5c$,
- ☐ $a_1 = -d$, $a_2 = 5 + c$, $a_3 = 5d$, $a_4 = c + d$.

$q(\lambda) = \det(\underline{M}\lambda^2 + \underline{D}\lambda + \underline{K})$

$p(\lambda) = \frac{1}{\det \underline{M}} \det(\underline{M}\lambda^2 + \underline{D}\lambda + \underline{K})$

$= \frac{1}{1}\det\begin{pmatrix}\lambda^2 + d\lambda + c & 0\\0 & \lambda^2 + 5\end{pmatrix}$

d) Geben Sie die fehlenden Eigenwerte der Seilbahngondel an.

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{5}\,i$, $\lambda_{3,4} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4c}}{2}$.

Eigenkreisfrequenz $\omega = \mathrm{Im}(\lambda)$ $= -\frac{d}{2} \pm i\sqrt{c - \frac{d^2}{4}}$

e) Welche Stabilitätsaussage ist nach dem Eigenwertkriterium korrekt? Das System ist

Abklingkoeff. $\delta = \mathrm{Re}(\lambda)$ Eigenkreisfreq. $\omega = \mathrm{Im}(\lambda)$

$\boxed{M19}$

- ☐ asymptotisch stabil,
- ☒ grenzstabil,
- ☐ instabil, da $\mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) = 0$
- ☐ keine Aussage möglich.

f) Wie lauten die Eigenfrequenzen des Systems für $4c \geq d^2$?

$\omega_1 = \sqrt{5}$, $\omega_2 = \sqrt{c - d^2/4}$.

g) Geben Sie die zugehörigen Eigenvektoren an.

$\tilde{y}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\tilde{y}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

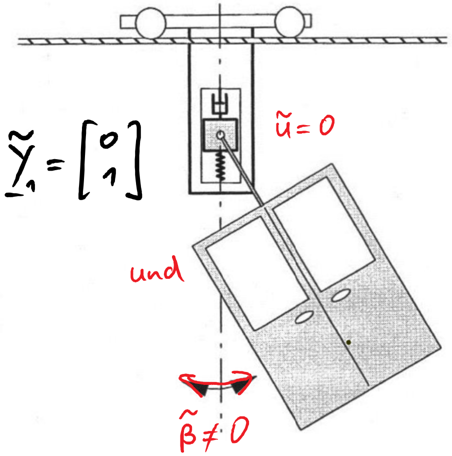
$\lambda_{1/2}$ u. $\lambda_{3/4}$ in Matrix einsetzen und LGS lösen:

$[\underline{M}\lambda_{1/2}^2 + \underline{D}\lambda_{1/2} + \underline{K}]\,\tilde{\underline{y}}_1 = \underline{0}$

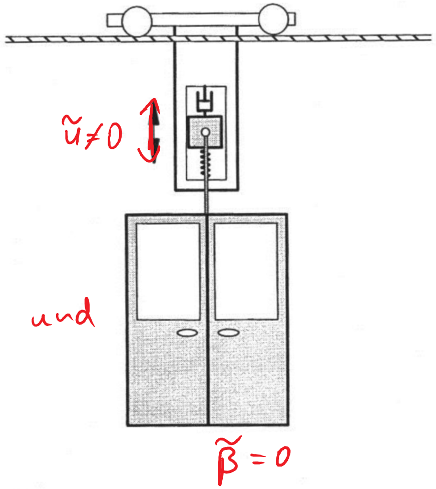
$[\underline{M}\lambda_{3/4}^2 + \underline{D}\lambda_{3/4} + \underline{K}]\,\tilde{\underline{y}}_2 = \underline{0}$

h) Ordnen Sie folgende Schwingungsformen den Eigenvektoren zu.

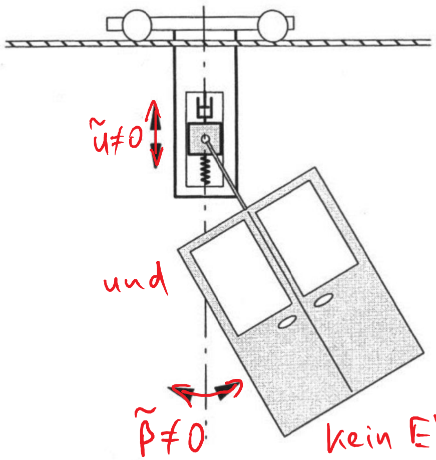
$\tilde{Y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



- [x] 1. Eigenform
- [ ] 2. Eigenform
- [ ] keine Eigenform



- [ ] 1. Eigenform
- [x] 2. Eigenform
- [ ] keine Eigenform



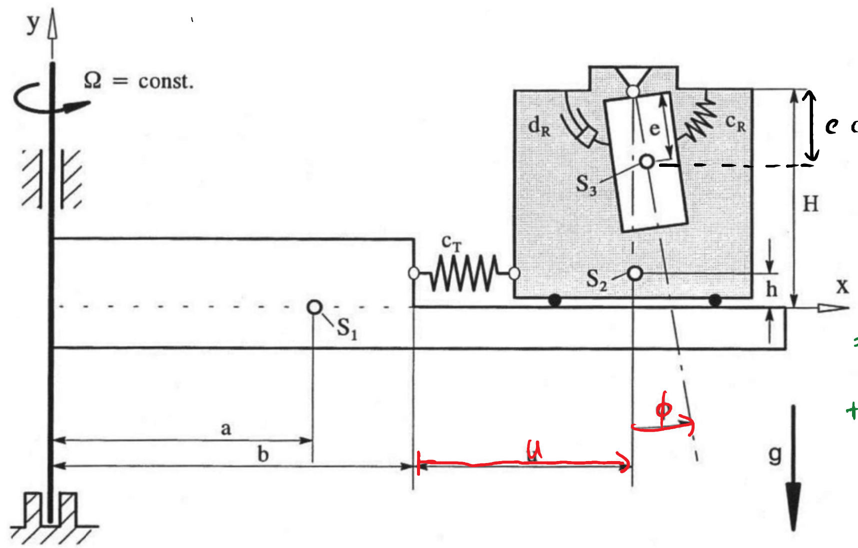
- [ ] 1. Eigenform
- [ ] 2. Eigenform
- [x] keine Eigenforn

kein EV
(auch bezeichnet
als Eigenform
oder Eigenmode)

Aufgabe 4 (34 Punkte)

Die Bewegung einer Trainingszentrifuge für Astronauten soll untersucht werden. Der Zentrifugenarm (Masse m_1) dreht sich mit der konstanten Drehgeschwindigkeit Ω um die y−Achse. Entlang des Arms kann sich der Schlitten (Masse m_2) reibungsfrei in radialer Richtung translatorisch bewegen. Zwischen Schlitten und Arm befindet sich eine Feder (Steifigkeit c_T). Die Astronautenkapsel (Masse m_3, Trägheitsmomente I_x, I_y, I_z) kann im Schlitten in radialer Richtung pendeln (Drehfeder c_R, Drehdämpfer d_R).

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ liegt der Schwerpunkt des Zentrifugenarms auf der x−Achse.



Hinweis: Die Aufgabe kann auch mit Aufgabenteil j) begonnen werden.

a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

$f = \underline{2}$.

b) Welcher Lagevektor eignet sich zur Beschreibung des Mehrkörpersystems?

- ☐ $y = [\Omega]$
- ☒ $y = [u \quad \phi]^T$
- ☐ $y = [e \quad u \quad \phi]^T$
- ☐ $y = [b \quad \phi]^T$

c) Geben Sie die Ortsvektoren zu den Massenmittelpunkten sowie die Drehmatrizen von Zentrifugenarm, Schlitten und Kapsel an.

Zentrifugenarm:

pos. Elementardrehung um y- Achse

$$\underline{\underline{S}}_1 \cdot \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} a\cos\Omega t \\ 0 \\ -a\sin\Omega t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & 0 & \sin\Omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Omega t & 0 & \cos\Omega t \end{bmatrix},$$

Schlitten:

$$\underline{\underline{S}}_2 \cdot \begin{bmatrix} b+u \\ h \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} (b+u)\cos\Omega t \\ h \\ -(b+u)\sin\Omega t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & 0 & \sin\Omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Omega t & 0 & \cos\Omega t \end{bmatrix}, = \underline{\underline{S}}_1$$

Kapsel:

$$\underline{\underline{S}}_2 \cdot \begin{bmatrix} b+u \\ H \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{\underline{S}}_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -e \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} (b+u+e\sin\phi)\cos\Omega t \\ H - e\cos\phi \\ -(b+u+e\sin\phi)\sin\Omega t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\Omega t & -\sin\phi\cos\Omega t & \sin\Omega t \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ -\cos\phi\sin\Omega t & \sin\phi\sin\Omega t & \cos\Omega t \end{bmatrix}. = \underline{\underline{S}}_2 \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Geben Sie die folgenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen an.

Zentrifugenarm:

$$\mathbf{v}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{J}}_{r_1} = \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial \underline{y}}} \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -a\Omega\sin(\Omega t) \\ 0 \\ -a\Omega\cos(\Omega t) \end{bmatrix}}_{\bar{\underline{v}}_1 = \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial t}},$$

$$\underline{a}_1 = \dot{\underline{J}}_{T1} \cdot \dot{\underline{y}} + \dot{\underline{v}}_1 \quad \text{(lok. Beschl.)}$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{J}_{T1}\,\ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -a\Omega^2 \cos\Omega t \\ 0 \\ a\Omega^2 \sin\Omega t \end{bmatrix}}_{},$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\underline{\underline{J}}_{R1}$ $\quad$ $\underline{\omega}_1$

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{J}_{R1}\,\ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\alpha}_1 = \dot{\underline{\underline{J}}}_{R1} \cdot \dot{\underline{y}} + \dot{\underline{\omega}}_1$$

Schlitten:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sin\Omega t & 0 \end{bmatrix}\dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} -(b+u)\Omega\sin\Omega t \\ 0 \\ -(b+u)\Omega\cos\Omega t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{J}_{T2}\,\ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} -2\dot{u}\Omega\sin\Omega t - (b+u)\Omega^2\cos\Omega t \\ 0 \\ -2\dot{u}\Omega\cos\Omega t + (b+u)\Omega^2\sin\Omega t \end{bmatrix},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\Omega\sin\Omega t & 0 \\ 0 & 0 \\ -\Omega\cos\Omega t & 0 \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{\underline{J}}}_{T2} = \frac{d\underline{\underline{J}}_{T2}}{dt}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\dot{u}\Omega\sin\Omega t - (b+u)\Omega^2\cos\Omega t \\ 0 \\ -\dot{u}\Omega\cos\Omega t + (b+u)\Omega^2\sin\Omega t \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{v}}_2 = \frac{d\underline{v}_2}{dt}}.$$

Kapsel:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & e\cos\phi\cos\Omega t \\ 0 & e\sin\phi \\ -\sin\Omega t & -e\cos\phi\sin\Omega t \end{bmatrix}\dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_3,$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sin\Omega t \\ 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega t \end{bmatrix}\dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix}.$$

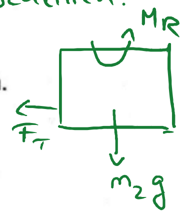
e) Wie groß ist ~~die auf den Schlitten wirkende Kraft der Feder~~ der Betrag der Federkraft zwischen Zentrifugenarm und Schlitten? (Die Feder ist für $u = u_0$ ungespannt.)

$$F_T = \left| (-)c_T\,(u-u_0) \right|.$$

f) Wie groß ist ~~das auf den Schlitten wirkende Moment~~ der Betrag des Moments zwischen Schlitten und Kapsel? (Die Drehfeder ist für $\phi = 0$ ungespannt.)

$$M_R = \left| c_R\,\phi + d_R\,\dot{\phi} \right|.$$

Freischnitt Schlitten:



g) Bestimmen Sie die eingeprägten Kräfte und Momente auf den Schlitten.

$$\mathbf{f}_2^e = \begin{bmatrix} -c_T(u-u_0)\cos\Omega t \\ -m_2 g \\ c_T(u-u_0)\sin\Omega t \end{bmatrix}, \quad = \underline{\underline{S}}_1 \cdot \begin{bmatrix} -c_T(u-u_0) \\ -m_2 g \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{l}_2^e = \begin{bmatrix} (c_R\phi + d_R\dot{\phi})\sin\Omega t \\ 0 \\ (c_R\phi + d_R\dot{\phi})\cos\Omega t \end{bmatrix} \quad = \underline{\underline{S}}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_R\phi + d_R\dot{\phi} \end{bmatrix}$$

h) Weshalb werden die Newton–Eulerschen–Gleichungen des Zentrifugenarms zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen nicht benötigt?

Der Arm ist durch $\Omega =$ const. gebunden. (Arm hat keine Dynamik, bzw. Bewegung ändert sich nicht)

i) Ergänzen Sie die Newton–Eulerschen–Gleichungen für den Schlitten und die Kapsel.

$$
\begin{array}{c}
m_2 \underline{\underline{J}}_{T_2} \\ \\ m_3 \underline{\underline{J}}_{T_3} \\ \\ \underline{\underline{I}}_2 \cdot \underline{\underline{J}}_{R_2} \\ \\ \underline{\underline{I}}_3 \cdot \underline{\underline{J}}_{R_3}
\end{array}
\underbrace{\begin{bmatrix}
m_2 \cos \Omega t & 0 \\
0 & 0 \\
-m_2 \sin \Omega t & 0 \\ \hline
m_3 \cos \Omega t & m_3 e \cos\phi \cos \Omega t \\
0 & m_3 e \sin \phi \\
-m_3 \sin \Omega t & -m_3 e \cos \phi \sin \Omega t \\ \hline
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\ \hline
0 & \mathrm{I}_z \sin \Omega t \\
0 & 0 \\
0 & \mathrm{I}_z \cos \Omega t
\end{bmatrix}}_{\text{Trägheitskräfte } \underline{\bar{M}} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\ddot{y}}}
\ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\bar{\mathbf{q}}^c}_{\substack{\text{Vektor der} \\ \text{Coriolis- \&} \\ \text{Zentrifugalkräfte}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_2^e \\ \hline \mathbf{f}_3^e \\ \hline \mathbf{l}_2^e \\ \hline \mathbf{l}_3^e \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Vektor der} \\ \text{eingeprägten Kräfte}}} + \bar{\mathbf{Q}}\,\mathbf{g}
\begin{array}{l}
\text{Impulssatz für Schlitten} \\ \\ \text{Impulssatz für Kapsel} \\ \\ \text{Drallsatz für Schlitten} \\ \\ \text{Drallsatz für Kapsel}
\end{array}
$$

$$
\bar{\mathbf{q}}^c = \begin{bmatrix}
m_2 \underline{\bar{a}}_2 \\ \hline
m_3 \underline{\bar{a}}_3 \\ \hline
\underline{\underline{I}}_2 \cdot \underline{\tilde{\alpha}}_2 + \underline{\tilde{\omega}}_2 \cdot \underline{\underline{I}}_2 \cdot \underline{\omega}_2 \\ \hline
\underline{\underline{I}}_3 \cdot \underline{\tilde{\alpha}}_3 + \underline{\tilde{\omega}}_3 \cdot \underline{\underline{I}}_3 \cdot \underline{\omega}_3
\end{bmatrix}
$$

Aus FS: $\underbrace{\underline{M}(\underline{y}_s,t)}_{\underline{M}}\cdot\ddot{\underline{\eta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{k}}{\partial \dot{\underline{y}}}\Big|_{\underline{y}_s,\dot{\underline{y}}_s} - \frac{\partial \underline{q}}{\partial \dot{\underline{y}}}\Big|_{\underline{y}_s,\dot{\underline{y}}_s}\right)}_{\underline{P}}\cdot\dot{\underline{\eta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{y}}\Big|_{\underline{y}_s}\cancel{\ddot{\underline{y}}_s}^{\,0} + \frac{\partial \underline{k}}{\partial \underline{y}}\Big|_{\underline{y}_s,\dot{\underline{y}}_s} - \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{y}}\Big|_{\underline{y}_s,\dot{\underline{y}}_s}\right)}_{\underline{Q}}\cdot\underline{\eta} = \underbrace{\underline{q}(\underline{y}_s,\dot{\underline{y}}_s,t) - \underline{k}(\underline{y}_s,\dot{\underline{y}}_s,t) - \underline{M}(\underline{y}_s,t)\cdot\cancel{\ddot{\underline{y}}_s}^{\,0}}_{\underline{h}}$

$\boxed{A13}$ $\boxed{A14}$

Das Aufstellen der Bewegungsgleichungen aus den Newton–Eulerschen–Gleichungen wurde mit einem Computerprogramm durchgeführt. Es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} m_2 + m_3 & m_3\, e\cos\phi \\ m_3\, e\cos\phi & I_z + m_3\, e^2 \end{bmatrix}\ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} -(m_2+m_3)(b+u)\Omega^2 - m_3\, e\sin\phi(\dot\phi^2 + \Omega^2) \\ (I_y - I_x)\ \Omega^2\sin\phi\cos\phi - m_3\ e\ \Omega^2\cos\phi(e\sin\phi + b + u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_T\ (u_0 - u) \\ -m_3\ g\ e\sin\phi - c_R\phi - d_R\dot\phi \end{bmatrix}.$$

j) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen um die Lage $u = u_0$ und $\phi = 0$, und geben Sie die Matrizen $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{K}$ sowie den Erregervektor $\mathbf{h}(t)$ der linearisierten Bewegungsgleichungen an.

$\underline{y}_s = \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{y} = \underline{y}_s + \underline{\eta}$

$\underline{D} = \frac{1}{2}(\underline{P} + \underline{P}^T)$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_2 + m_3 & m_3 e \\ m_3 e & I_z + m_3 e^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{0},$$

sym. sym.

$\underline{K} = \frac{1}{2}(\underline{Q} + \underline{Q}^T)$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -(m_2+m_3)\Omega^2 + c_T & -m_3 e\Omega^2 \\ -m_3 e\Omega^2 & (I_y - I_x)\Omega^2 - m_3 e^2\Omega^2 + m_3 g e + c_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} (m_2+m_3)(b+u_0)\Omega^2 \\ m_3 e\Omega^2(b+u_0) \end{bmatrix}.$$

sym.

k) Sind die linearisierten Bewegungen voneinander entkoppelt?

Nein, da Nebendiagonalen von $\underline{M}$ und $\underline{K} \neq 0$.

ENDE