



Maschinendynamik Seminar 1

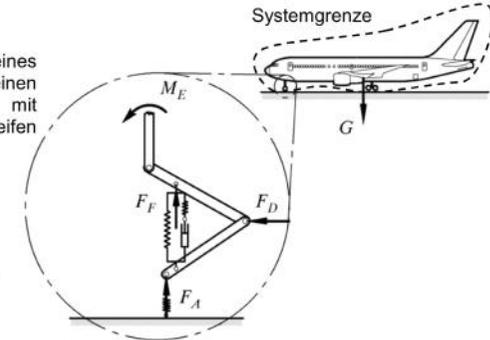
1. Das Seminar umfasst 5 Aufgaben auf 4 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
5. Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Die Musterlösungen zu diesen Aufgaben werden im Anschluss an das Seminar auf der Vorlesungshomepage bereitgestellt.

Aufgabe 1

Die Bugradaufhängung eines Flugzeuges wird durch einen Hebelmechanismus mit einem elastischen Reifen modelliert.

Die Systemgrenze wird um das gesamte Flugzeug gezogen.



Wie werden die eingetragenen Kräfte und Momente bezeichnet?

	äußere Kraft/Moment	innere Kraft/Moment	eingepreßte Kraft/Moment	Reaktionskraft/Moment	P-Kraft/Moment	PD-Kraft/Moment	PID-Kraft/Moment
Gewicht G des Flugzeuges	X		X		X		
Kraft F_F in Feder-Dämpfer-Kombination		X	X				X
Kraft F_D im Drehgelenk		X		X	---		
Aufstandskraft F_A des elastischen Reifens	X		X		X		
Einspannmoment M_E der Stütze		X		X	---		

siehe auch
Merkblatt
M11

Aufgabe 2

Wie lautet der Trägheitstensor des dargestellten Zylinders mit der Masse m im körperfesten Hauptachsensystem?

$$I'_z = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(3R^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix}$$

M13.2

Aufgabe 3

Die Masse m_2 eines ebenen Doppelpendels ist reibungsfrei an eine schiefe Ebene (Winkel β) gefesselt. Mittels dem **Prinzip der virtuellen Arbeit** soll die Gleichgewichtslage ermittelt werden.

a) Wie groß ist die Zahl der Freiheitsgrade des Systems?

$f = 1$

b) Wählen Sie eine geeignete verallgemeinerte Koordinate

$y = \alpha$

c) Bestimmen Sie die Ortsvektoren

$$\underline{d}_{T_1} = \begin{bmatrix} -L \sin \alpha \\ -L \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} L \cos \alpha \\ -L \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 2L \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{d}_{T_2} = \begin{bmatrix} -2L \sin \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

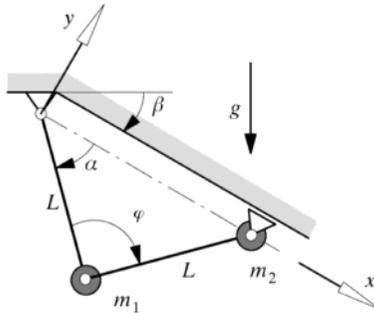
d) Wie lauten die virtuellen Verschiebungen des Systems?

$$\underline{d}_{T_n} \cdot \delta y = \delta \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} -L \sin \alpha \delta \alpha \\ -L \cos \alpha \delta \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} -2L \sin \alpha \delta \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Welche eingprägten Kräfte wirken auf die Massenpunkte?

Koordinatensyst. ist um β geneigt

$$\underline{f}_1^e = \begin{bmatrix} m_1 g \sin \beta \\ -m_1 g \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{f}_2^e = \begin{bmatrix} m_2 g \sin \beta \\ -m_2 g \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$



f) Wie groß ist die virtuelle Arbeit der eingprägten Kräfte?

$$\delta W^e = \sum_{i=1}^2 \delta \underline{r}_i^T \cdot \underline{f}_i^e$$

$$= \begin{bmatrix} -L \sin \alpha \delta \alpha \\ -L \cos \alpha \delta \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 g \sin \beta \\ -m_1 g \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2L \sin \alpha \delta \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 g \sin \beta \\ -m_2 g \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= Lg(-m_1 \sin \alpha \sin \beta + m_1 \cos \alpha \cos \beta - 2m_2 \sin \alpha \sin \beta) \delta \alpha = 0$$

$\Rightarrow (m_1 \sin \beta + 2m_2 \sin \beta) \tan \alpha = m_1 \cos \beta$

g) Bestimmen Sie nun aus dem Ergebnis von f) und mit dem **Prinzip der virtuellen Verschiebung** die Gleichgewichtslage y_G des Systems

$y_G = \alpha_G = \arctan \left(\frac{m_1}{m_1 + 2m_2} \cot \beta \right)$

Aufgabe 4

Die **Bewegungsgleichungen** eines Doppelpendels lassen sich formal mit dem Newton-Euler-Schema für holonome MKS räumlich ermitteln.

a) Freiheitsgrad:

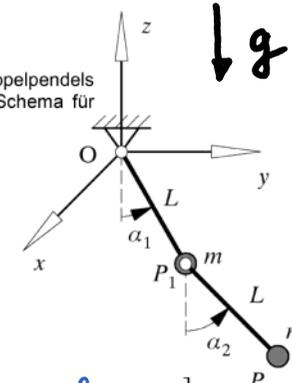
$f = 2$

Lagevektor:

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

b) Ortsvektoren:

$$\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ L \sin \alpha_1 \\ -L \cos \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ L(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \\ -L(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \end{bmatrix}$$



Geschwindigkeiten:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L \cos \alpha_1 & 0 \\ L \sin \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{y} + \bar{v}_1, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L \cos \alpha_2 & L \cos \alpha_2 \\ L \sin \alpha_2 & L \sin \alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \dot{y} + \bar{v}_2$$

Beschleunigungen:

$$a_1 = J_{T1} \cdot \ddot{y} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 & 0 \\ L \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ -L \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1 \\ L \dot{\alpha}_1^2 \cos \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = J_{T2} \cdot \ddot{y} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 & -L \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 \\ L \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 & L \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \dot{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ -L \dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2 - L \dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2 \\ L \dot{\alpha}_2^2 \cos \alpha_2 + L \dot{\alpha}_2^2 \cos \alpha_2 \end{bmatrix}$$

c) Eingeprägte Kräfte:

$$f_1^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}, \quad f_2^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

d) **Newton-Eulersche Gleichungen** (räumliche Betrachtung)

translatorisch:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m L \cos \alpha_1 & 0 \\ m L \sin \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \ddot{y} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -m L \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1 & 0 \\ m L \dot{\alpha}_1^2 \cos \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \bar{Q} \cdot g$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m L \cos \alpha_2 & m L \cos \alpha_2 \\ m L \sin \alpha_2 & m L \sin \alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \ddot{y} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -m L (\dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2 + \dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2) & -m L (\dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2 + \dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2) \\ m L (\dot{\alpha}_2^2 \cos \alpha_2 + \dot{\alpha}_2^2 \cos \alpha_2) & m L (\dot{\alpha}_2^2 \cos \alpha_2 + \dot{\alpha}_2^2 \cos \alpha_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \bar{Q} \cdot g$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \ddot{q} = \bar{Q} \cdot g$$

e) Durch Linksmultiplikation mit der globalen Jacobi-Matrix

$$J^T = \begin{bmatrix} 0 & L \cos \alpha_1 & L \sin \alpha_1 & 0 & L \cos \alpha_2 & L \sin \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L \cos \alpha_2 & L \sin \alpha_2 \end{bmatrix}$$

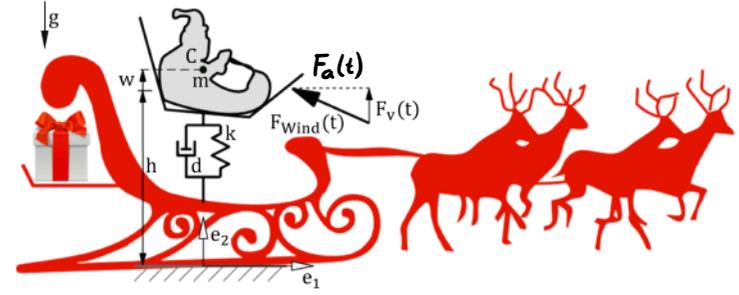
und mit den Additionstheoremen $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

ergeben sich die **Bewegungsgleichungen** zu

$$mL^2 \begin{bmatrix} 2 & \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \\ \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{mL^2 \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \\ -\dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \end{bmatrix}}_{k(y,\dot{y},t)} = -mgL \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 \end{bmatrix}}_{q(y,\dot{y},t)}$$

Aufgabe 5

Der Einfluss der vertikalen Windkraftkomponente $F_v(t)$ auf die Dynamik eines Fahrzeugsitzes (Masse m , Schwerpunkt C) soll im Auftrag eines bärtigen Mannes untersucht werden. Der Sitz ist in vertikaler Richtung durch ein Feder-Dämpfer-Element (Federsteifigkeit k , Dämpferkonstanten d) gelagert und befindet sich für $w = w_G = 0$ und $F_v(t_0) = 0$ an der Position h im Gleichgewicht. Der Vektor der verallgemeinerten Koordinaten lautet $q = [w]$.



a) Bestimmen Sie den Ortsvektor zum Schwerpunkt und dessen Beschleunigung.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ h+w \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Vervollständigen Sie die **Newton-Euler-Gleichungen**.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ m \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_a \\ -kw - d\dot{w} + F_v \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{f}^r$$

c) Wie lauten nun die linearen **Bewegungsgleichungen**?

$$\begin{bmatrix} m \\ d \\ k \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} d \\ k \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q} = \begin{bmatrix} F_v \\ 0 \end{bmatrix}$$

bzw. $\Rightarrow \ddot{w} + \frac{d}{m} \dot{w} + \frac{k}{m} w = \frac{F_v}{m}$

d) Ergänzen Sie die lineare **Zustandsdifferentialgleichung** in der systemdynamischen Form. Da das System nur den Eingang F_v und den interessierenden Ausgang w hat, ist der Eingangsvektor \mathbf{u} ein Skalar, die Eingangsmatrix \mathbf{B} ein Spaltenvektor, der Ausgangsvektor \mathbf{y} ein Skalar, die Ausgangsmatrix \mathbf{C} ein Zeilenvektor und die Durchgriffsmatrix \mathbf{D} ein Skalar.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}} \\ \ddot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot F_v$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

e) Berechnen Sie die gedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_1 durch das Lösen des EW-Problems. (Die imaginäre Einheit wird mit j bezeichnet.)

$$p(\lambda) = |\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{m} & \lambda + \frac{d}{m} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{d}{2m} \pm j \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}} = -\frac{d}{2m} \pm j \omega_{0,1}$$

f) Der bärtige Mann springt bei Windstille vom Dach aus auf seinen Sitz (Impulsanregung). Mit welcher Frequenz bewegt er sich nun näherungsweise? *(und bleibt dort sitzen)*

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2} \quad \left(\frac{1}{\text{sec}}\right)$$

g) Die Matrix der komplexen Übertragungsfunktionen im Frequenzbereich lässt sich mit $\mathbf{G}(\omega j) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{E}\omega j - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}$ berechnen. Bestimmen Sie den Amplitudenfrequenzgang $|\mathbf{G}(\omega j)|$, der das Übertragungsverhalten von der Windkraftkomponente $F_v(t)$ auf die Position $w(t)$ charakterisiert. Skizzieren Sie diesen für schwache Dämpfung und im ungedämpften Fall.

$$|\mathbf{G}(\omega j)| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\omega^2 j^2 + \omega j \frac{d}{m} + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} \omega j + \frac{d}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & \omega j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-m\omega^2 + j\omega d + k}$$

