S1_loes Seite 2

Maschinendynamik Seminar 1

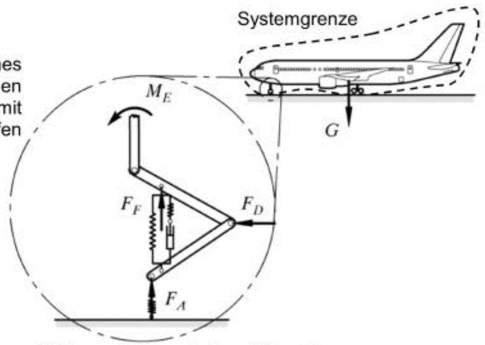
1. Das Seminar umfasst 5 Aufgaben auf 4 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
5. Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Die Musterlösungen zu diesen Aufgaben werden im Anschluss an das Seminar auf der Vorlesungshomepage bereitgestellt.

Aufgabe 1

Die Bugradaufhängung eines Flugzeuges wird durch einen Hebel-mechanismus mit einem elastischen Reifen modelliert.

Die Systemgrenze wird um das gesamte Flugzeug gezogen.



Wie werden die eingetragenen Kräfte und Momente bezeichnet?

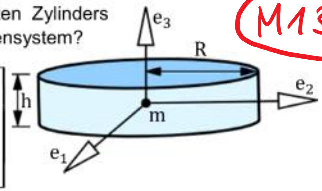
	äußere Kraft/Moment	innere Kraft/Moment	eingeprägte Kraft/Moment	Reaktionskraft/Moment	P−Kraft/Moment	PD−Kraft/Moment	PID−Kraft/Moment
Gewicht G des Flugzeuges	X		X		X		
Kraft F_F in Feder−Dämpfer−Kombination		X	X				X
Kraft F_D im Drehgelenk		X		X	—	—	—
Aufstandskraft F_A des elastischen Reifens	X		X		X		
Einspannmoment M_E der Stütze		X		X	—	—	—

siehe auch Merkblatt M11

Aufgabe 2

M13.2

Wie lautet der Trägheitstensor des dargestellten Zylinders mit der Masse m im körperfesten Hauptachsensystem?

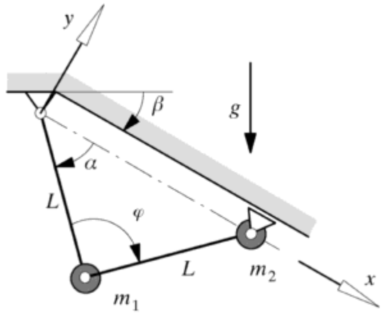


$$I'_Z = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(3R^2+h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix}$$

S1_loes Seite 3

Aufgabe 3

Die Masse m_2 eines ebenen Doppelpendels ist reibungsfrei an eine schiefe Ebene (Winkel β) gefesselt. Mittels dem **Prinzip der virtuellen Arbeit** soll die Gleichgewichtslage ermittelt werden.



a) Wie groß ist die Zahl der Freiheitsgrade des Systems?

f = 1

b) Wählen Sie eine geeignete verallgemeinerte Koordinate

y = α

c) Bestimmen Sie die Ortsvektoren

$$\underline{\underline{J}}_{T_1} = \begin{bmatrix} -L\sin\alpha \\ -L\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} L\cos\alpha \\ -L\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 2L\cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{J}}_{T_2} = \begin{bmatrix} -2L\sin\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Wie lauten die virtuellen Verschiebungen des Systems?

$$\underline{\underline{J}}_{T_1}\cdot\delta\underline{y} = \delta\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} -L\sin\alpha\,\delta\alpha \\ -L\cos\alpha\,\delta\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -2L\sin\alpha\,\delta\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Welche eingeprägten Kräfte wirken auf die Massenpunkte?

Koordinatensyst. ist um β geneigt

$$\mathbf{f}_1^e = \begin{bmatrix} m_1 g\sin\beta \\ -m_1 g\cos\beta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2^e = \begin{bmatrix} m_2 g\sin\beta \\ -m_2 g\cos\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

f) Wie groß ist die virtuelle Arbeit der **eingeprägten** Kräfte?

$$\delta W^e = -\sum_{i=1}^{2} \delta\underline{r}_i^T \cdot \underline{f}_i^e$$

$$= \begin{bmatrix} L\sin\alpha\,\delta\alpha \\ L\cos\alpha\,\delta\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 g\sin\beta \\ -m_1 g\cos\beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2L\sin\alpha\,\delta\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_2 g\sin\beta \\ m_2 g\cos\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= Lg(m_1\sin\alpha\sin\beta - m_1\cos\alpha\cos\beta + 2m_2\sin\alpha\sin\beta)\delta\alpha = 0$$

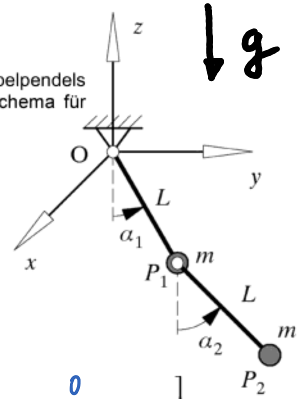
$$\Rightarrow (m_1\sin\beta + 2m_2\sin\beta)\tan\alpha = m_1\cos\beta$$

g) Bestimmen Sie nun aus dem Ergebnis von f) und mit dem **Prinzip der virtuellen Verschiebung** die Gleichgewichtslage y_G des Systems

$$y_G = \alpha_G = \arctan\left(\frac{m_1}{m_1 + 2m_2}\cot\beta\right)$$

Aufgabe 4

Die **Bewegungsgleichungen** eines Doppelpendels lassen sich formal mit dem Newton−Euler−Schema für holonome MKS räumlich ermitteln.



a) Freiheitsgrad: f = 2

Lagevektor: $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$

b) Ortsvektoren:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ L\sin\alpha_1 \\ -L\cos\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ L(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) \\ -L(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) \end{bmatrix}.$$

Geschwindigkeiten:

$$\mathbf{v}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L\cos\alpha_1 & 0 \\ L\sin\alpha_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{J}}_{T1}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L\cos\alpha_1 & L\cos\alpha_2 \\ L\sin\alpha_1 & L\sin\alpha_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{J}}_{T2}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_2$$

Beschleunigungen:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{J}_{T1} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L\dot{\alpha}_1 \sin\alpha_1 & 0 \\ L\dot{\alpha}_1\cos\alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \cancel{\dot{\bar{\mathbf{v}}}_1}^{\,0}, \qquad \bar{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -L\dot{\alpha}_1^2 \sin\alpha_1 \\ L\dot{\alpha}_1^2\cos\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{J}_{T2} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -L\dot{\alpha}_1 \sin\alpha_1 & -L\dot{\alpha}_2\sin\alpha_2 \\ L\dot{\alpha}_1\cos\alpha_1 & L\dot{\alpha}_2\cos\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \cancel{\dot{\bar{\mathbf{v}}}_2}^{\,0}, \qquad \bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -L\dot{\alpha}_1^2 \sin\alpha_1 - L\dot{\alpha}_2^2\sin\alpha_2 \\ L\dot{\alpha}_1^2\cos\alpha_1 + L\dot{\alpha}_2^2\cos\alpha_2 \end{bmatrix}$$

c) Eingeprägte Kräfte:

$$\mathbf{f}_1^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}.$$

d) Newton–Eulersche Gleichungen (räumliche Betrachtung)

translatorisch:

$$\begin{array}{l} \text{Körper 1} \\ \\ \\ \text{Körper 2} \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ mL\cos\alpha_1 & 0 \\ mL\sin\alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ mL\cos\alpha_1 & mL\cos\alpha_2 \\ mL\sin\alpha_1 & mL\sin\alpha_2 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{M}}\cdot\bar{\mathbf{J}}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -mL\dot{\alpha}_1^2\sin\alpha_1 \\ mL\dot{\alpha}_1^2\cos\alpha_1 \\ \hline 0 \\ -mL(\dot{\alpha}_1^2\sin\alpha_1 + \dot{\alpha}_2^2\sin\alpha_2) \\ mL(\dot{\alpha}_1^2\cos\alpha_1 + \dot{\alpha}_2^2\cos\alpha_2) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{q}}^c} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \\ \hline 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{q}}^e} + \bar{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{g}$$

$m\bar{a}_1$, $m\bar{a}_2$, f_1^e, f_2^e

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_1 & & & \underline{0} & \\ & & m_1 & & & \\ \hline & & & m_2 & & \\ & \underline{0} & & & m_2 & \\ & & & & & m_2 \end{bmatrix}$$

e) Durch Linksmultiplikation mit der globalen Jacobi-Matrix

$$\bar{\mathbf{J}}^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & L\cos\alpha_1 & L\sin\alpha_1 & 0 & L\cos\alpha_1 & L\sin\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L\cos\alpha_2 & L\sin\alpha_2 \end{array}\right]$$

$\underline{\underline{J}}_{T1}^T$, $\underline{\underline{J}}_{T2}^T$

und mit den Additionstheoremen $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

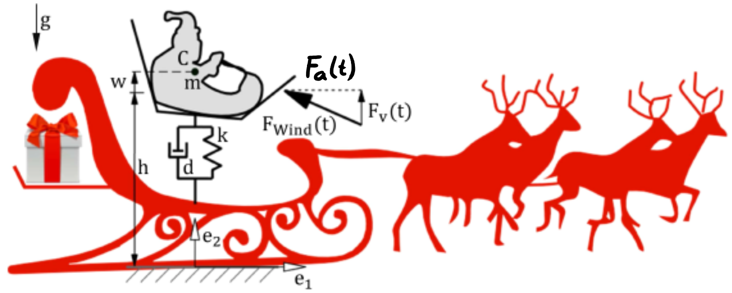
ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\underbrace{mL^2 \begin{bmatrix} 2 & \cos(\alpha_1-\alpha_2) \\ \underline{\cos(\alpha_1-\alpha_2)} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(\mathbf{y},t)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{y}}} + \underbrace{mL^2 \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1-\alpha_2) \\ -\dot{\alpha}_1^2\sin(\alpha_1-\alpha_2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)} = \underbrace{-mgL \begin{bmatrix} 2\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)}.$$

sym.

Aufgabe 5

Der Einfluss der vertikalen Windkraftkomponente $F_v(t)$ auf die Dynamik eines Fahrzeugsitzes (Masse m, Schwerpunkt C) soll im Auftrag eines bärtigen Mannes untersucht werden. Der Sitz ist in vertikaler Richtung durch ein Feder-Dämpfer-Element (Federsteifigkeit k, Dämpferkonstanten d) gelagert und befindet sich für $w = w_G = 0$ und $F_v(t_0) = 0$ an der Position h im Gleichgewicht.
Der Vektor der verallgemeinerten Koordinaten lautet $\mathbf{q} = [\,w\,]$.



S1_loes Seite 4

a) Bestimmen Sie den Ortsvektor zum Schwerpunkt und dessen Beschleunigung.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ h+w \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{j}_T} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{j}}_T} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\dot{\mathbf{v}}}}$$

b) Vervollständigen Sie die Newton-Euler-Gleichungen.

$$\underline{\underline{J}}^T \cdot \Bigg| \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ m \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\bar{\mathbf{M}}}\cdot\bar{\mathbf{j}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{m\,\bar{\mathbf{a}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -F_a \\ -kw - d\dot{w} + F_v \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^e} + \mathbf{f}^r$$

c) Wie lauten nun die linearen Bewegungsgleichungen?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{q} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_v \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}},$$

bzw. $\Rightarrow \ddot{w} + \frac{d}{m}\dot{w} + \frac{k}{m} w = \frac{F_v}{m}$

d) Ergänzen Sie die lineare **Zustandsdifferentialgleichung** in der systemdynamischen Form. Da das System nur den Eingang F_v und den interessierenden Ausgang w hat, ist der Eingangsvektor **u** ein Skalar, die Eingangsmatrix **B** ein Spaltenvektor, der Ausgangsvektor **y** ein Skalar, die Ausgangsmatrix **C** ein Zeilenvektor und die Durchgriffsmatrix **D** ein Skalar.

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \ddot{w} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} F_v \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$-\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}$

$$\mathbf{y} = \underbrace{[1 \quad 0]}_{\mathbf{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{[0]}_{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{u}$$

e) Berechnen Sie die gedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_1 durch das Lösen des EW-Problems. (Die imaginäre Einheit wird mit j bezeichnet.)

$$p(\lambda) = |\mathbf{E}\,\lambda - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{m} & \lambda + \frac{d}{m} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{d}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = \underbrace{-\frac{d}{2m}}_{\sigma_1} \pm j \underbrace{\overbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}^{\omega_{0,1}} \sqrt{1 - \frac{d^2}{4mk}}}_{\omega_1}$$

und bleibt dort sitzen

f) Der bärtige Mann springt bei Windstille vom Dach aus auf seinen Sitz (Impulsanregung). Mit welcher Frequenz bewegt er sich nun näherungsweise?

$\omega = 2\pi f \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2} \quad \left(\frac{1}{sec}\right)$

g) Die Matrix der komplexen Übertragungsfunktionen im Frequenzbereich lässt sich mit $\mathbf{G}(\omega\,j) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{E}\omega j - \mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{D}$ berechnen. Bestimmen Sie den Amplitudenfrequenzgang $|G(\omega j)|$, der das Übertragungsverhalten von der Windkraftkomponente $F_v(t)$ auf die Position $w(t)$ charakterisiert. Skizzieren Sie diesen für schwache Dämpfung und im ungedämpften Fall.

$$|G(\omega j)| = [1 \quad 0] \cdot \frac{1}{\omega^2 j^2 + \omega j \frac{d}{m} + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} \omega j + \frac{d}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & \omega j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$= \left| \frac{1}{-m\omega^2 + j\omega d + k} \right|$$