18. März 2025

Prüfung in Maschinendynamik

Nachname, Vorname	
Musterlösung	
Matrikelnummer	Fachrichtung
E-Mail Adresse (Angabe freiwillig)	

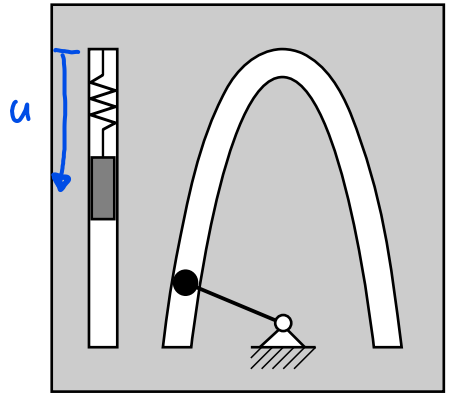
1. Die Prüfung umfasst 8 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

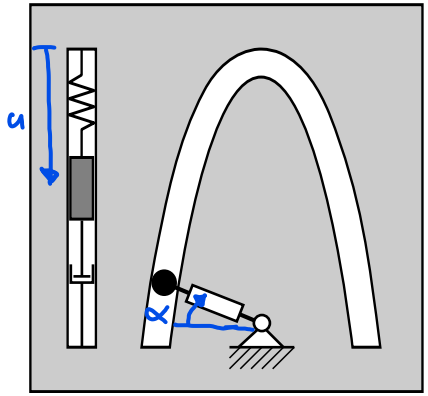
M. Vierneisel
(stud. Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$ 63	

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Geben Sie für die folgenden ebenen Systeme die Zahl der Freiheitsgrade f und einen geeigneten Vektor der verallgemeinerten Koordinaten $\boldsymbol{y}$ an. Tragen Sie diese verallgemeinerten Koordinaten in die Zeichnung ein und benennen Sie diese.

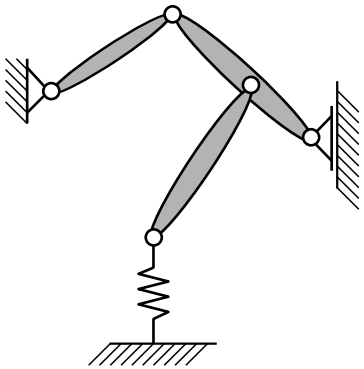




$f =$ 1 , $\boldsymbol{y} = [\ u\ ]$,

$f =$ 2 , $\boldsymbol{y} = [\ u \quad \alpha\ ]$

b) Klassifizieren Sie das folgende ebene System, indem Sie die gesuchten Größen bestimmen.



Anzahl der Freiheitsgrade des freigeschnittenen Mehrkörpersystems

$f^{\mathrm{u}} =$ 9

Summe aller Lagerwertigkeiten

$n^{\mathrm{c}} =$ 7

Zahl der unabhängigen Lagerwertigkeiten

$n =$ 7

Anzahl der Freiheitsgrade des gebundenen Mehrkörpersystems

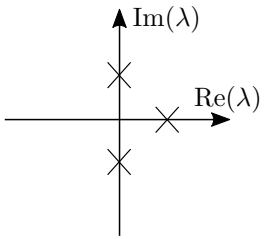
$f =$ 2

Aufgabe 2 (7 Punkte)

a) Wie bezeichnet man die folgenden Zwangsbedingungen?
Hinweis: Ω und L sind konstant, die Zeit wird durch t beschrieben und alle anderen Größen sind implizit zeitabhängig.

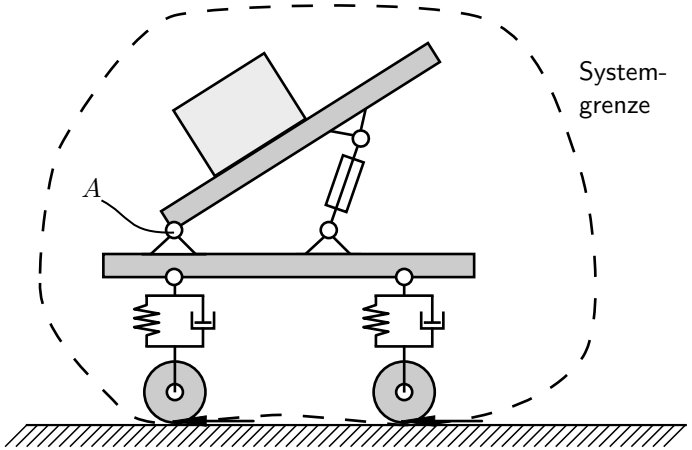
	geometrisch	kinematisch	holonom	nichtholonom	rheonom	skleronom
$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = L^2$	X		X			X
$\dot{x}_1 = 5\Omega t^2$		X	X		X	
$-\dot{x}\sin(\varphi) + \dot{y}\cos(\varphi) = 0$		X		X		X

b) Welche Stabilitätseigenschaften haben die folgenden linearen Systeme, die durch ihre Eigenwerte λ oder durch ihre Lösung $x(t)$ charakterisiert sind?

	asymptotisch stabil	grenzstabil	instabil	keine Aussage möglich
$p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda$		X		
$\lambda_{1,2,3} = 0$				X
$x(t) = e^{-2t}(\cos(\Omega t - \varphi) + \sin(\Omega t - \varphi))$	X			
			X	

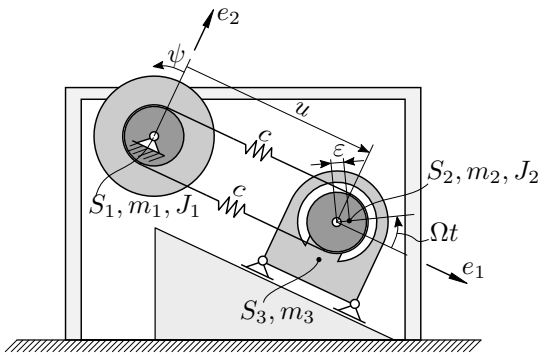
Aufgabe 3 (7 Punkte)

Dargestellt ist ein mechanisches Ersatzmodell eines Transportwagens. Die Räder rollen ohne zu gleiten. Durch das Lagestellglied wird der Winkel des Aufliegers so verändert, dass der Klotz vom Auflieger gleitet. Klassifizieren Sie die Kräfte.



	äußere Kraft	innere Kraft	eingeprägte Kraft	Reaktionskraft
Gewichtskraft des Wagens	X		X	
Gleitreibungskraft zwischen Klotz und Auflieger		X	X	
horizontale Lagerkraft in A		X		X
vertikale Lagerkraft in A		X		X
Feder-Dämpfer Kräfte		X	X	
Normalkräfte zwischen Rädern und Boden	X			X
Haftreibungskräfte zwischen Rädern und Boden	X			X

Aufgabe 4 (11 Punkte)



Ein Kreissägeblatt (Schwerpunkt S_1, Masse m_1, Trägheitsmoment um die e_3-Achse J_1) wird mittels eines Riementriebs durch einen Elektroantrieb angetrieben. Der Elektroantrieb besteht aus dem Rotor (Schwerpunkt S_2, Masse m_2) und dem Gehäuse (Schwerpunkt S_3, Masse m_3). Die Winkelgeschwindigkeit des Rotors Ω ist konstant. Der Massenmittelpunkt des Rotors hat den Abstand ε vom Drehpunkt. Beide Riemenscheiben haben den Radius r.
Der Vektor der verallgemeinerten Koordinaten lautet $\boldsymbol{y} = [\psi \;\; u]^\mathsf{T}$.
Hinweis: Die Aufgabenteile c) bis f) können unabhängig von den vorherigen Aufgabenteilen gelöst werden.

a) Geben Sie die Position des Schwerpunkts des Rotors an.

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} u + \varepsilon\cos(\Omega t) \\ \varepsilon\sin(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die translatorische Geschwindigkeit von Körper 2.

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} -\varepsilon\Omega\sin(\Omega t) \\ \varepsilon\Omega\cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die rotatorischen Geschwindigkeiten beider Körper.

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix}$$

Die linearisierten Bewegungsgleichungen des Systems ergeben sich zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{u} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2cr^2 & 0 \\ 0 & 2c \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \cdot \begin{bmatrix} \psi \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2cr^2\Omega t \\ m_2\varepsilon\Omega^2\cos(\Omega t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{h}(t)}.$$

d) Bewerten Sie die folgenden Aussagen.

wahr	falsch	
☐	☒	Die Unwucht des Motors hat einen Einfluss auf die Drehbewegung des Sägeblatts.
☒	☐	Die Unwucht des Motors hat einen Einfluss auf die Translationsbewegung des Motors.

e) Wie lautet das charakteristische Polynom?

$$p(\lambda) = (J_1\lambda^2 + 2cr^2)((m_2 + m_3)\lambda^2 + 2c)$$

$$(= J_1(m_2+m_3)\lambda^4 + (2J_1c + 2cr^2(m_2+m_3))\lambda^2 + 4c^2r^2)$$

f) Berechnen Sie die Eigenwerte des Systems.

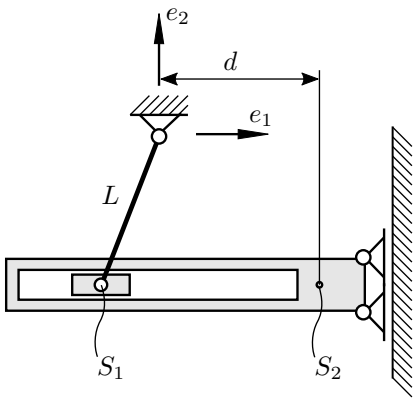
$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{2cr^2}{J_1}}, \qquad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{2c}{m_2+m_3}}$$

g) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren des Systems.

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Ein ebener Schubkurbeltrieb wird mit einer masselosen Kurbel (Länge L) sowie mit zwei Körpern (Schwerpunkte S_1 und S_2) modelliert. Die Ortsvektoren zu den Schwerpunkten lauten $\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ und $\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$. Die Verdrehungen der freien Körper werden mit den Winkeln α_1 und α_2 beschrieben.
Hinweis: Führen Sie eine ebene Betrachtung durch.



a) Bestimmen Sie die Anzahl der Freiheitsgrade des freigeschnittenen Mehrkörpersystems f^{u}, die Anzahl der Freiheitsgrade des gebundenen Mehrkörpersystems f sowie die Zahl der unabhängigen Lagerwertigkeiten n.

$f^{\mathrm{u}} =$ 6 , $f =$ 1 , $n =$ 5

b) Wie lauten die unabhängigen Bindungsgleichungen in impliziter Form?

$x_1^2 + y_1^2 - L^2 = 0$

$x_2 - d = 0$

$y_1 - y_2 = 0$

$\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = 0$

c) Klassifizieren Sie die Bindungen des Systems.

☒ geometrisch	☐ nichtholonom	☒ skleronom
☐ kinematisch	☒ holonom	☐ rheonom

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Die Frequenzgangmatrix eines mechanischen Systems ist durch

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{N(\Omega)} \begin{bmatrix} \Omega^4 - 5\Omega^2 + 6 & 0 & -2\Omega^2 + 6 \\ 0 & 0.5\Omega^4 - 2.5\Omega^2 + 2 & 0 \\ -2\Omega^2 + 6 & 0 & 2\Omega^4 - 12\Omega^2 + 18 \end{bmatrix}$$

mit $N(\Omega) = (-\Omega^2 + 3)(0.5\Omega^4 - 2.5\Omega^2 + 2)$ gegeben. Das System wird durch die Erregung $\boldsymbol{h}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\Omega t)$ zwangserregt.

a) Formulieren Sie den Erregervektor in der komplexen Darstellung.

$$\boldsymbol{h}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{h}_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\overline{\boldsymbol{h}_0}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}$$

b) Berechnen Sie den Amplitudenvektor $\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{h}_0$ der stationären Systemantwort $\boldsymbol{y}_{\mathrm{H}_\infty} = \boldsymbol{q}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + \bar{\boldsymbol{q}}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}$.

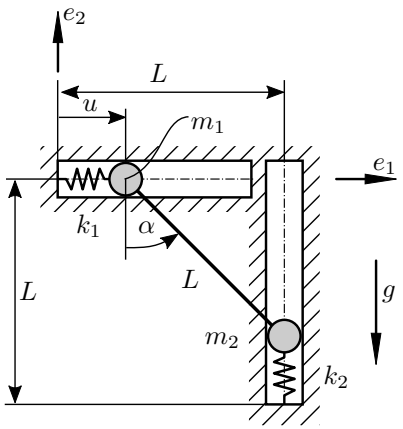
$$\boldsymbol{q}_0 = \frac{1}{N(\Omega)} \begin{bmatrix} 1/2(\Omega^4 - 5\Omega^2 + 6) \\ 0 \\ -\Omega^2 + 3 \end{bmatrix}$$

c) Welche Phänomene können bei harmonischer Anregung des Systems durch $\boldsymbol{h}(t)$ bei den angegebenen Anregungsfrequenzen Ω auftreten?

	$\Omega = 1$	$\Omega = \sqrt{2}$	$\Omega = \sqrt{3}$	$\Omega = 2$
strenge Resonanz	X			X
Scheinresonanz			X	
Resonanzerscheinung				
Tilgung		X		
kein besonderes Phänomen				

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Das dargestellte Mehrkörpersystem besteht aus zwei Punktmassen (Masse m_1 bzw. m_2), die über unterschiedliche Federn (Federsteifigkeit k_1, ungespannte Federlänge u_0 bzw. Federsteifigkeit k_2, ungespannte Federlänge $\frac{L}{2}$) an die Umgebung gekoppelt sind. Die Punktmassen sind durch einen masselosen Stab (Länge L) verbunden. Für $u = 0$ liegt die Punktmasse m_2 auf der e_1-Achse.



a) Geben Sie die Ortsvektoren der Massepunkte im Inertialsystem an. Bestimmen Sie außerdem die jeweils auf die Massen wirkenden eingeprägten Kräfte.
Hinweis: Vernachlässigen Sie hierfür zunächst die Abhängigkeit $u(\alpha)$ und verwenden Sie sowohl u als auch α zur Formulierung der Ortsvektoren und der eingeprägten Kräfte.

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} -k_1(u-u_0) \\ -m_1 g \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} L \\ -L\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g - k_2(L/2 - L\cos\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen α und u.

$u(\alpha) =$ $L - L\sin\alpha$

c) Geben Sie die Vektoren der virtuellen Verschiebung in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate $\boldsymbol{y} = \alpha$ an.

$$\delta\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} -L\cos\alpha\,\delta\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ L\sin\alpha\,\delta\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Wie berechnet sich allgemein für ein System mit zwei Punktmassen die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte?

$\delta W^{\mathrm{e}} =$ $\sum_{i=1}^{2} \delta\boldsymbol{r}_i^T \boldsymbol{f}_i^e$

e) Für bestimmte Werte lautet die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte

$$\delta W^{\mathrm{e}} = \frac{k_1}{2}L^2\cos(\alpha)\delta\alpha - (m_2 g + \frac{k_1}{2}L)L\sin(\alpha)\delta\alpha.$$

Berechnen Sie daraus die Gleichgewichtslage α_{G}.

$\alpha_{\mathrm{G}} =$ $\arctan\left(\frac{k_1 L}{2m_2 g + k_1 L}\right)$

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems lauten

$$\underbrace{\begin{bmatrix} mL^2 & mL\sin(\beta) \\ mL\sin(\beta) & 3m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{y},t)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{u} \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -mL\cos(\beta)\dot{\beta}^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{y},\dot{\boldsymbol{y}},t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -mgL\sin(\beta) \\ -k(u-u_0) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y},\dot{\boldsymbol{y}},t)}.$$

Diese sollen für kleine Auslenkungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen um den Arbeitspunkt $\boldsymbol{y}_\mathrm{s} = [0 \;\; u_0]^\mathsf{T}$, $\dot{\boldsymbol{y}}_\mathrm{s} = \ddot{\boldsymbol{y}}_\mathrm{s} = [0 \;\; 0]^\mathsf{T}$ linearisiert werden. Es gilt $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_\mathrm{s} + \boldsymbol{\eta}$, wobei $\boldsymbol{\eta}$ den Vektor der linearen verallgemeinerten Koordinaten darstellt.
Hinweis: Im Allgemeinen lautet die lineare Form der oben dargestellten Bewegungsgleichungen

$$\underbrace{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{y}_\mathrm{s},t)}_{\widetilde{\boldsymbol{M}}(t)} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \dot{\boldsymbol{y}}}\Big|_{\boldsymbol{y}_\mathrm{s},\dot{\boldsymbol{y}}_\mathrm{s}} - \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \dot{\boldsymbol{y}}}\Big|_{\boldsymbol{y}_\mathrm{s},\dot{\boldsymbol{y}}_\mathrm{s}} \right)}_{\boldsymbol{P}(t)} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{y}}\Big|_{\boldsymbol{y}_\mathrm{s}} \cdot \ddot{\boldsymbol{y}}_\mathrm{s} + \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \boldsymbol{y}}\Big|_{\boldsymbol{y}_\mathrm{s},\dot{\boldsymbol{y}}_\mathrm{s}} - \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{y}}\Big|_{\boldsymbol{y}_\mathrm{s},\dot{\boldsymbol{y}}_\mathrm{s}} \right)}_{\boldsymbol{Q}(t)} \cdot \boldsymbol{\eta}$$
$$= \underbrace{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}_\mathrm{s},\dot{\boldsymbol{y}}_\mathrm{s},t) - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{y}_\mathrm{s},\dot{\boldsymbol{y}}_\mathrm{s},t) - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{y}_\mathrm{s},t) \cdot \ddot{\boldsymbol{y}}_\mathrm{s}}_{\boldsymbol{h}(t)}.$$

a) Bestimmen Sie die linearisierte Bewegungsgleichung, indem Sie die linearisierte Massenmatrix $\widetilde{\boldsymbol{M}}(t)$, die Matrix der geschwindigkeitsabhängigen Kräfte $\boldsymbol{P}(t)$, die Matrix der lageabhängigen Kräfte $\boldsymbol{Q}(t)$ und den Erregervektor $\boldsymbol{h}(t)$ angeben.

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}(t) = \begin{bmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} mgL & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Klassifizieren Sie das linearisierte System.

☐ gedämpft	☐ fremderregt
☒ ungedämpft	☒ frei

c) Die linearen Bewegungsgleichungen sollen in die Zustandsraumdarstellung der Form $\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ überführt werden. Bestimmen Sie die Anzahl der Freiheitsgrade f und die Dimension n des Zustandsvektors $\boldsymbol{\xi}$.

$$f = 2, \qquad n = 4$$

d) Bestimmen Sie einen geeigneten Zustandsvektor.

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix}.$$

e) Bestimmen Sie die Systemmatrix $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{3m} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ende