19. März 2024

Prüfung in Maschinendynamik

Nachname, Vorname	
Matrikelnummer	Fachrichtung
E-Mail Adresse (Angabe freiwillig)	

1. Die Prüfung umfasst 7 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

....
(stud. Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Wie bezeichnet man die folgenden Zwangsbedingungen?
Hinweis: Ω, L sind konstant, die Zeit wird durch t beschrieben und alle anderen Größen sind implizit zeitabhängig.

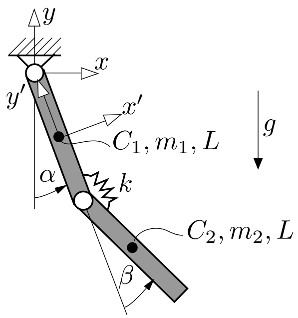
	geometrisch	kinematisch	holonom	nichtholonom	rheonom	skleronom
$L^2 - \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = 0$						
$\dot{u} = \cos(\Omega t)$						
$\dot{\beta} = \dot{\alpha} + \Omega$						
$\varphi + \Omega t = 0$						
$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \cos(\varphi)$						

b) Welche Stabilitätseigenschaften haben die folgenden linearen Systeme, die durch ihre Eigenwerte λ sowie ihre geometrische Vielfachheit d, durch ihre Differentialgleichung oder durch ihre Lösung $x(t)$ charakterisiert sind?

	asymptotisch stabil	grenzstabil	instabil	keine Aussage möglich
$x(t) = (2+\mathrm{i})e^{\mathrm{i}\,3t} + (2-\mathrm{i})e^{-\mathrm{i}\,3t}$				
$\det(\lambda^2 \boldsymbol{M} + \lambda \boldsymbol{D} + \boldsymbol{K}) = \lambda^2 + \lambda - 6$				
$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}$				
$\lambda_{1,2} = 0,\;\; \lambda_{3,4} = -2 \pm \mathrm{i}$				
$\lambda_{1,2,3} = 0,\;\; \lambda_{4,5} = \pm\mathrm{i},\;\; d_{1,2,3} = 2$				

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Betrachtet wird das abgebildete ebene Körperpendel. Beide Körper bestehen aus homogenen dünnen Stäben (Schwerpunkt C_1, Masse m_1, Länge L, körperfestes Koordinatensystem $\mathrm{K}'\{x', y'\}$ bzw. Schwerpunkt C_2, Masse m_2, Länge L). Die Stäbe sind über eine Drehfeder (Federkonstante k) gekoppelt. Die Feder ist für $\beta = 0$ entspannt. Der Vektor der verallgemeinerten Koordinaten lautet $\boldsymbol{y} = [\alpha \quad \beta]^\mathsf{T}$.
Hinweis: Sofern nicht anders angegeben, sind alle Größen bezüglich des Inertialsystems $\mathrm{K}\{x, y\}$ anzugeben.



a) Bestimmen Sie die Anzahl der Freiheitsgrade f des Systems.

$f =$ _ _ _ _ _

b) Geben Sie die Position der Schwerpunkte der Körper an.

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

c) Geben Sie die Orientierung der Körper an.

$$\boldsymbol{S}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

d) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen der Translation.

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{T},1} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{T},2} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

e) Berechnen Sie die translatorische Beschleunigung von Körper 2, indem Sie den lokalen Beschleunigungsvektor $\bar{\boldsymbol{a}}_2$ bestimmen.

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{J}_{\mathrm{T},2} \cdot \ddot{\boldsymbol{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{a}}_2}$$

f) Bestimmen Sie die eingeprägten Kräfte und Momente bezogen auf den Schwerpunkt, die auf Körper 2 wirken.

$$\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_2^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

g) Wie lautet der Trägheitstensor von Körper 1 bezüglich des Schwerpunkts im körperfesten Koordinatensystem K'?

$$\boldsymbol{I}_1^{(\mathrm{K}')} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

h) Mit welcher Gleichung kann der Trägheitstensor von Körper 1 ins Inertialsystem K überführt werden?

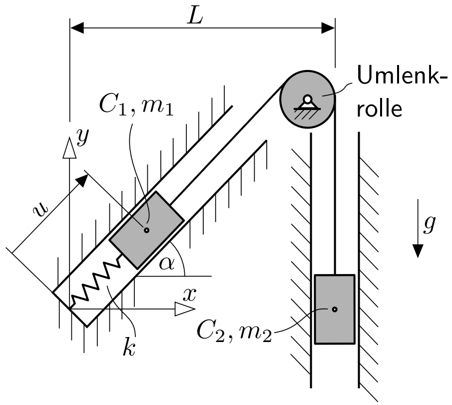
$$\boldsymbol{I}_1^{(\mathrm{K})} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

i) Welche Gleichungen der Kinetik müssen zwingend in den Newton-Euler-Gleichungen berücksichtigt werden, um die Bewegungsgleichungen herzuleiten?

- ☐ Newton'sche Gleichungen von Körper 1.
- ☐ Euler'sche Gleichungen von Körper 1.
- ☐ Newton'sche Gleichungen von Körper 2.
- ☐ Euler'sche Gleichungen von Körper 2.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Das abgebildete ebene System soll untersucht werden. Körper 1 (Schwerpunkt C_1, Masse m_1) ist über ein Seil und eine Umlenkrolle mit Körper 2 (Schwerpunkt C_2, Masse m_2) verbunden. Das Seil ist masselos und stets gespannt. Zwischen Seil und Umlenkrolle tritt kein Schlupf auf. Die Umlenkrolle kann als masselos angenommen werden. Beide Körper gleiten reibungsfrei in den Führungen. Die verallgemeinerte Koordinate ist u. Für $u = u_0$ ist die Feder entspannt und der Schwerpunkt von Körper 2 befindet sich bei $y = 0$.



a) Geben Sie die Ortsvektoren der Schwerpunkte der Körper im Inertialsystem in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate und der gegebenen geometrischen Größen an.

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

b) Geben Sie die Vektoren der virtuellen Verschiebung an.

$$\delta\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \delta\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

c) Wie lauten die jeweils auf die Körper wirkenden eingeprägten Kräfte?

$$\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

d) Berechnen Sie die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte.

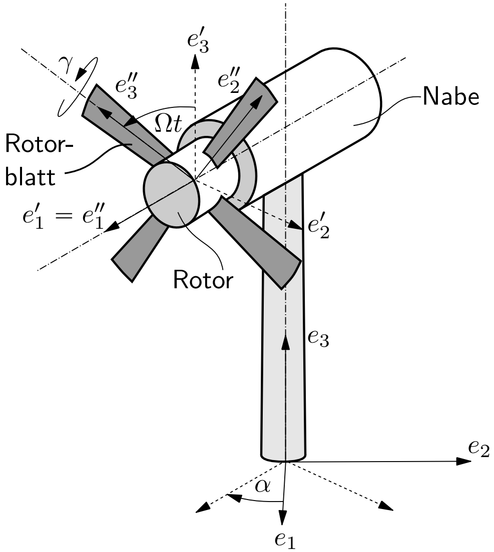
$\delta W_{\mathrm{e}} =$ __________________________

e) Berechnen Sie daraus die Gleichgewichtslage u_{G}.

$u_{\mathrm{G}} =$ __________________________

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Die Drehbewegungen des abgebildeten Windrads werden betrachtet. Die Nabe ist gegenüber dem Inertialsystem $\mathrm{K}\{e_1, e_2, e_3\}$ um den Winkel α verdreht, um immer ideal im Wind zu stehen. Der Rotor dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω. Der Anstellwinkel aller Rotorblätter wird durch den Winkel γ beschrieben, wobei γ im positiven Drehsinn um die e_3''-Achse definiert ist. Die Berechnung soll für das gekennzeichnete Rotorblatt erfolgen. Als Vektor der verallgemeinerten Koordinaten wird $\boldsymbol{y} = [\alpha \quad \gamma]^\mathsf{T}$ gewählt. Für $t = 0$, $\alpha = 0$ und $\gamma = 0$ sind die Koordinatensysteme $\mathrm{K}\{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathrm{K}'\{e_1', e_2', e_3'\}$ und $\mathrm{K}''\{e_1'', e_2'', e_3''\}$ gleich orientiert.



a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

$$f = \_\_\_\_\_$$

b) Aus welchen Elementardrehungen setzt sich die Rotation des Rotorblatts gegenüber dem Inertialsystem zusammen?

	positive	negative				
1.	☐	☐	Drehung um	☐ e_1	☐ e_2	☐ e_3
2.	☐	☐	Drehung um	☐ e_1'	☐ e_2'	☐ e_3'
3.	☐	☐	Drehung um	☐ e_1''	☐ e_2''	☐ e_3''

c) Geben Sie den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_3$ des Rotorblatts bezüglich des Inertialsystems im Inertialsystem an.

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{S}_{\mathrm{KK}'}} \cdot \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{S}_{\mathrm{KK}''}} \cdot \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

d) Drücken Sie die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_3$ mit der Jacobi-Matrix der Rotation $\boldsymbol{J}_{\mathrm{R},3}$ und dem lokalen Winkelgeschwindigkeitsvektor $\bar{\boldsymbol{\omega}}_3$ aus.

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{J}_{\mathrm{R},3}} \cdot \dot{\boldsymbol{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_3}$$

e) Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{J}_{\mathrm{R},3} \cdot \ddot{\boldsymbol{y}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3$ des Rotorblatts, indem Sie den lokalen Beschleunigungsvektor $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3$ berechnen.

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Gegeben sind die Bewegungsgleichungen eines fremderregten, ungedämpften Mehrkörpersystems in Abhängigkeit der Masse m_T

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_\mathrm{T} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \cdot \ddot{\boldsymbol{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \cdot \boldsymbol{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\Omega t)}_{\boldsymbol{h}(t)} .$$

Hinweis: Die Aufgabenteile f) bis h) können unabhängig von den vorherigen Aufgabenteilen gelöst werden.

a) Wie kann allgemein das charakteristische Polynom in Abhängigkeit der Matrizen $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{K}$ berechnet werden?

$q(\lambda) =$ _

b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom für das gegebene System in Abhängigkeit von λ und m_T.

$q(\lambda, m_\mathrm{T}) =$ _

c) Berechnen Sie die Eigenwerte des Systems für $m_\mathrm{T} = \frac{1}{2}$.

$\lambda_{1,2} =$ _ _ _ _ _ , $\lambda_{3,4} =$ _ _ _ _ _ , $\lambda_{5,6} =$ _ _ _ _ _

d) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren des Systems für $m_\mathrm{T} = \frac{1}{2}$.

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{y}}_3 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

e) Welche der folgenden Aussagen ist wahr, falls die Masse auf $m_\mathrm{T} = \frac{1}{4}$ reduziert wird? Kreuzen Sie Zutreffendes an.

- ☐ Die Eigenwerte ändern sich nicht.
- ☐ Alle Eigenwerte ändern sich.
- ☐ Ein Eigenwertpaar bleibt gleich.

f) Formulieren Sie den Erregervektor in der komplexen Darstellung.

$$\boldsymbol{h}(t) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}$$

g) Für das betrachtete System und $m_\mathrm{T} = \frac{1}{2}$ ist die Frequenzgangmatrix durch

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{N(\Omega)} \begin{bmatrix} 0.5\Omega^4 - 3.5\Omega^2 + 6 & -2\Omega^2 + 6 & 0 \\ -2\Omega^2 + 6 & \Omega^4 - 9\Omega^2 + 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5\Omega^4 - 5\Omega^2 + 8 \end{bmatrix}$$

mit $N(\Omega) = (-\Omega^2 + 3)(0.5\Omega^4 - 5\Omega^2 + 8)$ gegeben. Berechnen Sie den Amplitudenvektor der stationären Systemantwort $\boldsymbol{x}_{\mathrm{H}_\infty} = \boldsymbol{g}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + \bar{\boldsymbol{g}}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}$.

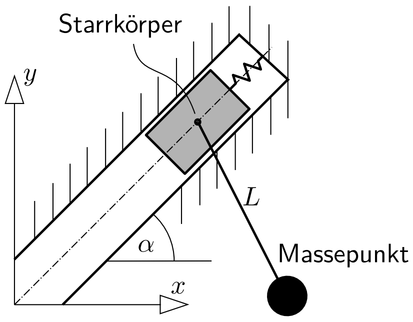
$$\boldsymbol{g}_0 = \frac{1}{N(\Omega)} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

h) Welche Phänomene können bei harmonischer Anregung des System durch $\boldsymbol{h}(t)$ bei den angegebenen Anregungsfrequenzen Ω auftreten?

	$\Omega = \sqrt{3}$	$\Omega = \sqrt{2}$	$\Omega = 2\sqrt{2}$	$\Omega = 3$
strenge Resonanz				
Scheinresonanz				
Resonanzerscheinung				
kein besonderes Phänomen				

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Betrachtet wird das abgebildete ebene Mehrkörpersystem. Ein Starrkörper gleitet reibungsfrei innerhalb der um den Winkel α geneigten Führung. Die Lage des freien Starrkörpers wird über seine Position x_1, y_1 und seine Verdrehung ϑ_1 beschrieben. Für $\vartheta_1 = 0$ wäre der Starrkörper horizontal ausgerichtet. Der Starrkörper ist über einen masselosen und drehbar gelagerten Stab (Länge L) mit einem Massepunkt (Position x_2, y_2) verbunden. Zudem ist der Starrkörper über eine Feder an die Umgebung gekoppelt.



a) Wie viele Freiheitsgrade hat das ungebundene System? Geben Sie außerdem den Lagevektor $\boldsymbol{x}$ des freien Systems an.

$$f^{\mathrm{u}} = \underline{\hspace{2cm}}, \qquad \boldsymbol{x} = \left[\ \underline{\hspace{6cm}}\ \right]^{\mathsf{T}}$$

b) Wie lauten die Bindungsgleichungen in impliziter Form?

$$\varphi_1(\boldsymbol{x}) = \underline{\hspace{6cm}} = 0$$

$$\varphi_2(\boldsymbol{x}) = \underline{\hspace{6cm}} = 0$$

$$\varphi_3(\boldsymbol{x}) = \underline{\hspace{6cm}} = 0$$

c) Bestimmen Sie die Zahl der unabhängigen Lagerwertigkeiten.

$$n = \operatorname{Rang} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

d) Wie viele Freiheitsgrade hat das gebundene System? Geben Sie einen geeigneten Vektor der verallgemeinerten Koordinaten an. Tragen Sie die gewählten verallgemeinerten Koordinaten in die Skizze ein.

$$f = \underline{\hspace{2cm}}, \qquad \boldsymbol{y} = \left[\ \underline{\hspace{4cm}}\ \right]^{\mathsf{T}}$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems lauten

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 3\cos(\alpha) & 4\cos(\beta) \\ 3\cos(\alpha) & 3 & 4\cos(\alpha-\beta) \\ 4\cos(\beta) & 4\cos(\alpha-\beta) & 8 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{y},t)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -3\dot{\alpha}^2\sin(\alpha) - 4\dot{\beta}^2\sin(\beta) \\ 4\dot{\beta}^2\sin(\alpha-\beta) \\ -4\dot{\alpha}^2\cos(\alpha-\beta) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{y},\dot{\boldsymbol{y}},t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3u \\ -3\sin(\alpha) \\ -4\sin(\beta) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y},\dot{\boldsymbol{y}},t)}.$$

Diese sollen für kleine Auslenkungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen um den Arbeitspunkt $\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}} = [2 \quad 0 \quad 0]^{\mathsf{T}}$, $\dot{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{s}} = \ddot{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{s}} = [0 \quad 0 \quad 0]^{\mathsf{T}}$ linearisiert werden. Es gilt $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{\eta}$, wobei $\boldsymbol{\eta}$ den Vektor der linearen verallgemeinerten Koordinaten darstellt.
Hinweis: Im Allgemeinen lautet die lineare Form der oben dargestellten Bewegungsgleichungen

$$\underbrace{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}},t)}_{\widetilde{\boldsymbol{M}}(t)} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \dot{\boldsymbol{y}}}\bigg|_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}},\dot{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{s}}} - \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \dot{\boldsymbol{y}}}\bigg|_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}},\dot{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{s}}} \right)}_{\boldsymbol{P}(t)} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \boldsymbol{y}}\bigg|_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}}} \cdot \ddot{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{s}} + \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \boldsymbol{y}}\bigg|_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}},\dot{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{s}}} - \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{y}}\bigg|_{\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}},\dot{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{s}}} \right)}_{\boldsymbol{Q}(t)} \cdot \boldsymbol{\eta}$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}},\dot{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{s}},t) - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}},\dot{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{s}},t) - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{y}_{\mathrm{s}},t) \cdot \ddot{\boldsymbol{y}}_{\mathrm{s}}.}_{\boldsymbol{h}(t)}$$

Bestimmen Sie die folgenden Größen.

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}(t) = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}(t) = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{h}(t) = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}$$

Ende