21. März 2023

Prüfung in Maschinendynamik

Nachname, Vorname	
Musterlösung	
Matr.-Nummer	Studiengang
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	

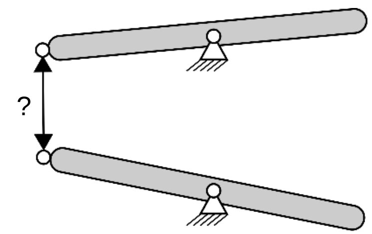
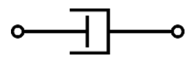
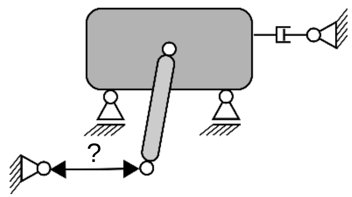
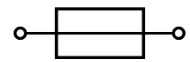
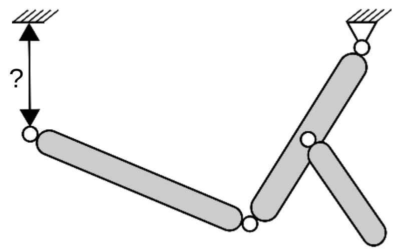
1. Die Prüfung umfasst 9 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

M. Vierneisel
(stud. Unterschrift)

Punkte	Korrektur
Σ	

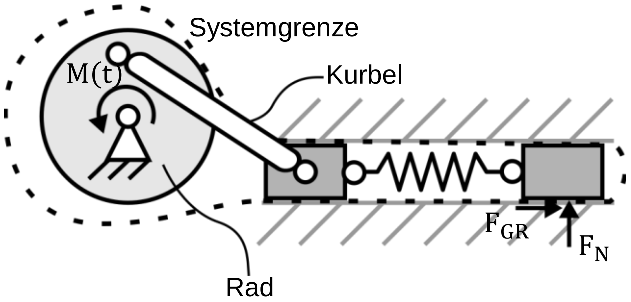
Aufgabe 1 (3 Punkte)

Die vorgegebenen Modellelemente auf der rechten Seite können zwischen die mit dem Pfeil und dem Fragezeichen gekennzeichneten Punkte als Verbindung beziehungsweise Lagerung eingesetzt werden. Kreuzen Sie jeweils diejenigen Elemente an, die für das jeweilige ebene Mehrkörpersystem zu der angegebenen Anzahl an Freiheitsgraden f führt.

	$f = 2$	☐	
		☒	
		☒	
	$f = 2$	☒	
		☐	
		☒	
	$f = 1$	☒	
		☐	

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Das abgebildete ebene Schubkurbelsystem soll untersucht werden. Das Drehmoment ist mit $M(t) = 4\sin(2t)$ gegeben und wird von einem momentengeregelten Motor außerhalb der Systemgrenze erzeugt.

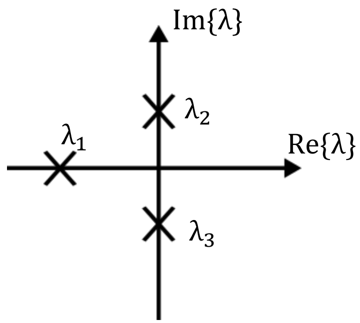


Klassifizieren Sie die folgenden im System auftretenden Kräfte und Momente.

	äußere Kraft	innere Kraft	eingeprägte Kraft	Reaktions-kraft
Federkraft		X	X	
Gleitreibungskraft F_{GR}	X		X	
Normalkraft F_N	X			X
Kraft im Gelenk zwischen Rad und Kurbel		X		X
Motormoment $M(t)$	X		X	

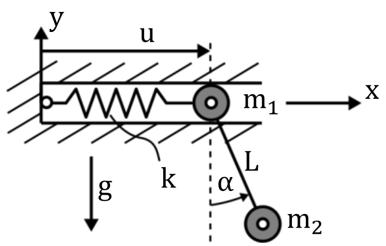
Aufgabe 3 (6 Punkte)

Welche Stabilitätseigenschaften haben die folgenden linearen Systeme, die durch ihre Eigenwerte λ, ihre Differentialgleichung bzw. durch ihre Lösung $x(t)$ charakterisiert sind?

	asymptotisch stabil	grenzstabil	instabil	keine Aussage möglich
$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \lambda(2\lambda^2 + 10\lambda + 8)$		X		
$2\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$	X			
$\lambda_{1,2} = 0,\ \ \lambda_{3,4} = \pm 2i$				X
$x(t) = 2\,e^{5t}\cos(2t)$			X	
$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{x}_0$ mit $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$	X			
		X		

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Betrachtet wird das dargestellte ebene System mit zwei Massepunkten (Masse m_1 bzw. m_2). Diese sind durch einen masselosen Stab (Länge L) verbunden. Der Massepunkt 1 gleitet reibungsfrei in einer Führung. Die Feder mit der Federsteifigkeit k ist für $u = u_0$ kräftefrei. Der Vektor der verallgemeinerten Koordinaten lautet $\mathbf{y} = [u, \alpha]^T$.



a) Geben Sie die Ortsvektoren der Massepunkte als Funktion der verallgemeinerten Koordinate an.

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} u + L\sin(\alpha) \\ -L\cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Wie lauten die virtuellen Verschiebungen des Systems?

$$\delta\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \delta u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \delta u + L\cos(\alpha)\,\delta\alpha \\ L\sin(\alpha)\,\delta\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die auf die Massen wirkenden eingeprägten Kräfte.

$$\mathbf{f}_1^e = \begin{bmatrix} -k(u-u_0) \\ -m_1 g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Wie berechnet sich allgemein die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte des Systems unter Verwendung der in b) und c) eingeführten Größen?

$\delta W^e = \sum_{i=1}^{p} \delta \underline{r}_i^T \cdot \underline{f}_i^e$ mit p... Anzahl der Körper, hier p=2

e) Bestimmen Sie eine Gleichgewichtslage des Systems.

$\mathbf{y}_G = [u_0 \quad 0]^T$ weitere Lösungsmöglichkeiten $\underline{x}_G = [u_0 \quad k\pi]^T$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Die linearen Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems lauten

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}}.$$

a) Bestimmen Sie eine lineare Zustandsgleichung in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$ mit $\mathbf{x} = [\mathbf{y}^T, \dot{\mathbf{y}}^T]^T$.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Welche Formulierungen können zur Berechnung des charakteristischen Polynoms herangezogen werden?

- ☐ $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{E})$
- ☒ $p(\lambda) = \frac{1}{\det(\mathbf{M})}\det(\lambda^2\mathbf{M} + \mathbf{Q})$
- ☒ $p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$
- ☐ $p(\lambda) = \det(\mathbf{M} + \lambda^2\mathbf{Q})$

c) Stellen Sie für das gegebene System die charakteristische Gleichung zur Lösung des Eigenwertproblems auf.

$\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = 0$

d) Wie lauten somit die Eigenwerte?

$\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$

e) Wie lauten zugehörige Eigenvektoren der mechanischen Betrachtung?

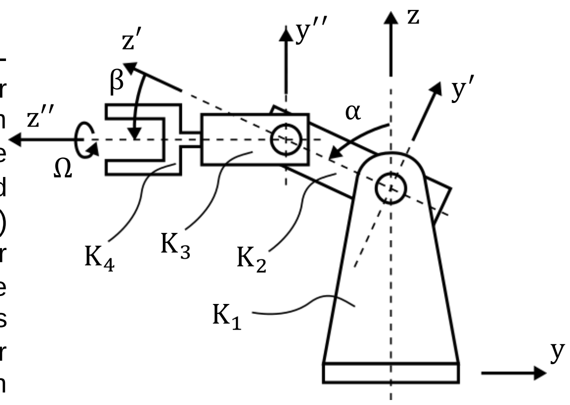
$$\tilde{\mathbf{y}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{y}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{y}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{y}}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

f) Wie können ganz allgemein die Eigenvektoren der Zustandsraumdarstellung $\tilde{\mathbf{x}}_i$ aus den Eigenvektoren der mechanischen Betrachtung $\tilde{\mathbf{y}}_i$ und den Eigenwerten λ_i gewonnen werden?

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{y}_i \\ \lambda_i \tilde{y}_i \end{bmatrix}$$

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Die Kinematik eines Robotergreifers soll untersucht werden. Der Roboter besteht aus einem unbeweglichen Körper (K_1) sowie zwei beweglichen Armen (K_2 und K_3). Am Arm K_3 ist ein Greifer (K_4) befestigt, der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die positive Drehrichtung des Arms (K_3) dreht. Der Vektor der verallgemeinerten Koordinaten lautet $\mathbf{y} = [\alpha, \beta]^T$.



a) Aus welchen Elementardrehungen setzt sich die Rotation des Greifers (K_4) gegenüber dem Inertialsystem $K\{\mathbf{0}, x, y, z\}$ zusammen?

	positive	negative				
1.	☒	☐	Drehung um	☒ x	☐ y	☐ z
2.	☒	☐	Drehung um	☒ x'	☐ y'	☐ z'
3.	☒	☐	Drehung um	☐ x''	☐ y''	☒ z''

b) Geben Sie den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_4$ des Greifers bezüglich des Inertialsystems im Inertialsystem an.
Hinweis: Verwenden Sie hierfür gegebenenfalls auch die Additionstheoreme
$\sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v) = \sin(u+v)$ und
$\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v) = \cos(u+v)$.

$$\boldsymbol{\omega}_4 = \begin{bmatrix} \dot\alpha + \dot\beta \\ -\Omega\sin(\alpha+\beta) \\ \Omega\cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

c) Drücken Sie die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_4$ mit der Jacobi-Matrix der Rotation $\mathbf{J}_{R4}$ und dem lokalen Winkelgeschwindigkeitsvektor $\bar{\boldsymbol{\omega}}_4$ aus.

$$\boldsymbol{\omega}_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R4}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\Omega\sin(\alpha+\beta) \\ \Omega\cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_4}$$

d) Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}_4$ des Greifers, indem Sie den lokalen Beschleunigungsvektor $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_4$ berechnen.

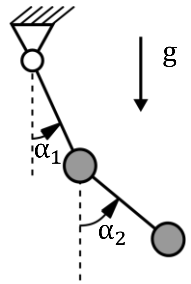
$$\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{J}_{R4} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\Omega(\dot\alpha + \dot\beta)\cos(\alpha+\beta) \\ -\Omega(\dot\alpha+\dot\beta)\sin(\alpha+\beta) \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_4}$$

e) Begründen Sie, weshalb die Drehung zwischen K_3 und K_4 nicht als verallgemeinerte Koordinate beschrieben wird.

Winkelgeschwindigkeit Ω is konstant, was somit eine Bindung darstellt.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Ein ungedämpftes Doppelpendel wird durch die Zustandsgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} = [\alpha_1, \alpha_2, \dot\alpha_1, \dot\alpha_2]^T$ beschrieben. Die Fundamentalmatrix des Pendels ergibt sich mit dimensionsloser Zeit t zu

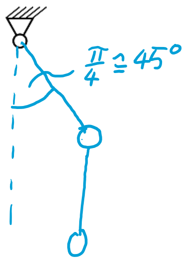


$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1-2t^2 & t^2 & -\frac{2}{3}t^3+t & \frac{1}{3}t^3 \\ 2t^2 & 1-t^2 & \frac{2}{3}t^3 & -\frac{2}{3}t^3+t \\ 4t^3-4t & -\frac{8}{3}t^3+2t & 1-2t^2 & t^2 \\ -\frac{16}{3}t^3+4t & 4t^3-4t & 2t^2 & 1-2t^2 \end{bmatrix}.$$

a) Welche Form hat die allgemeine Lösung für die Anfangsbedingung $\mathbf{x}_0 = \left[\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0\right]^T$?

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1-2t^2 \\ 2t^2 \\ 4t^3-4t \\ -16/3\, t^3+4t \end{bmatrix} \cdot \frac{\pi}{4}$$

b) Skizzieren Sie das Pendel in der Anfangsposition.



c) Wie lässt sich der Zustand des Pendels $\mathbf{x}(t_2)$ zum Zeitpunkt t_2 mit Hilfe der Fundamentalmatrix aus einem gegebenen Zustand $\mathbf{x}(t_1)$ mit $t_1 < t_2$ berechnen?

$\mathbf{x}(t_2) = \underline{\underline{\Phi}}(t_2 - t_1) \cdot \underline{x}(t_1)$

d) Wie kann allgemein mit Hilfe der Modalmatrix $\mathbf{X}$ und den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ die Fundamentalmatrix bestimmt werden?

$\mathbf{\Phi}(t) = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}(t) \cdot \underline{\underline{X}}^{-1}$ mit $\underline{\underline{\Lambda}}(t) = diag(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}, e^{\lambda_4 t})$

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems lauten

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2 l\cos(\alpha) \\ m_2 l\cos(\alpha) & m_2 l^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(\mathbf{y},t)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot x \\ \ddot\alpha \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -m_2 l\dot\alpha^2\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -kx-d\dot x \\ -m_2 lg\sin(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)}$$

Diese sollen für kleine Auslenkungen und Geschwindigkeiten um den Arbeitspunkt $\mathbf{y}_s = [2,0]^T$, $\dot{\mathbf{y}}_s = [0,\pi]^T$ und $\ddot{\mathbf{y}}_s = \mathbf{0}$ linearisiert werden. Es gilt $\mathbf{y} = \mathbf{y}_s + \boldsymbol{\eta}$, wobei $\boldsymbol{\eta}$ den Vektor der linearen verallgemeinerten Koordinaten darstellt.

Hinweis: Im Allgemeinen lautet die linearisierte Form der oben dargestellten Bewegungsgleichungen

$$\underbrace{\mathbf{M}(\mathbf{y}_s,t)}_{\tilde{\mathbf{M}}(t)} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\bigg|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s} - \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\bigg|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s}\right)}_{\mathbf{P}(t)} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{y}}\bigg|_{\mathbf{y}_s} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_s + \frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\mathbf{y}}\bigg|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s} - \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{y}}\bigg|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s}\right)}_{\mathbf{Q}(t)} \cdot \boldsymbol{\eta}$$
$$= \underbrace{\mathbf{q}(\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s,t) - \mathbf{k}(\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s,t) - \mathbf{M}(\mathbf{y}_s,t)\cdot\ddot{\mathbf{y}}_s}_{\mathbf{h}(t)}.$$

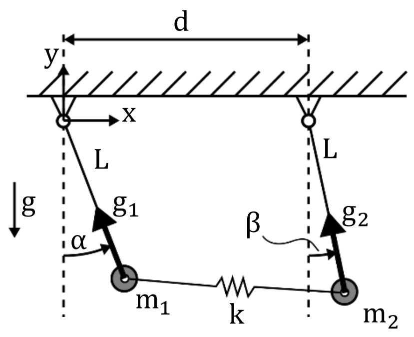
Bestimmen Sie die linearisierte Bewegungsgleichung, indem Sie die linearisierte Massenmatrix $\tilde{\mathbf{M}}$, die Matrix der geschwindigkeitsabhängigen Kräfte $\mathbf{P}$, die Matrix der lageabhängigen Kräfte $\mathbf{Q}$ und den Erregervektor $\mathbf{h}$ angeben.

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2 l \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} k & -m_2 l\pi^2 \\ 0 & m_2 l g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} -2k \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 9 (12 Punkte)

Betrachtet wird das abgebildete, durch eine Feder gekoppelte, ebene Pendel. Die Lage der Massepunkte mit den Massen m_1 und m_2 ist über den Lagevektor des freien Systems $\mathbf{x} = [x_1, y_1, x_2, y_2]^T$ gegeben. Die verallgemeinerten Reaktionen sind $\mathbf{g} = [g_1, g_2]^T$. Führen Sie eine ebene Betrachtung durch.



a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

$f = 2$

b) Wie lauten die Bindungsgleichungen in impliziter Form?

$\varphi_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + y_1^2 - L^2 = 0$

$\varphi_2(\mathbf{x}) = (x_2 - d)^2 + y_2^2 - L^2 = 0$

c) Welche Eigenschaften gelten für die beiden Bindungen?

- [x] geometrisch
- [ ] kinematisch
- [x] holonom
- [ ] nichtholonom
- [x] skleronom
- [ ] rheonom

d) Geben Sie die Ortsvektoren und die Jacobi-Matrizen der Massepunkte als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y} = [\alpha, \beta]^T$ an.

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} L\sin(\alpha) \\ -L\cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{T1} = \begin{bmatrix} L\cos(\alpha) & 0 \\ L\sin(\alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} d + L\sin(\beta) \\ -L\cos(\beta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{T2} = \begin{bmatrix} 0 & L\cos(\beta) \\ 0 & L\sin(\beta) \end{bmatrix}$$

e) Geben Sie die Reaktionskraftvektoren in Abhängigkeit der verallgemeinerten Reaktionen an.

$$\mathbf{f}_1^r = \begin{bmatrix} -g_1\sin(\alpha) \\ g_1\cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2^r = \begin{bmatrix} -g_2\sin(\beta) \\ g_2\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

f) Geben Sie die Verteilungsmatrizen der Reaktionskräfte an. Es ist $\mathbf{f}_i^r = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{g}$.

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) & 0 \\ \cos(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

g) Welche Beziehung besteht zwischen der globalen Jacobi-Matrix $\bar{\mathbf{J}} = \left[\mathbf{J}_{T1}^T, \mathbf{J}_{T2}^T\right]^T$ und der globalen Verteilungsmatrix $\bar{\mathbf{Q}} = \left[\mathbf{F}_1^T, \mathbf{F}_2^T\right]^T$ und was bedeutet diese Beziehung anschaulich?

$\underline{\underline{J}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{0}}$

Virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte verschwindet, da zulässige Bewegungen senkrecht zu den verallgemeinerten Reaktionen stehen

ENDE