Institut für Technische und Num. Mechanik
Profs. P. Eberhard, J. Fehr, M. Hanss

22. März 2022

Prüfung in Maschinendynamik

Nachname, Vorname	
Musterlösung	
Matr.-Nummer	Fachrichtung
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	

1. Die Prüfung umfasst 8 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

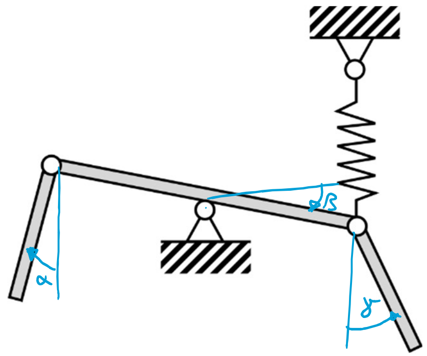
M. Vierneisel
....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden ebenen Mehrkörpersysteme die Anzahl der Freiheitsgrade f. Geben Sie einen Satz geeigneter verallgemeinerter Koordinaten $\mathbf{y}$ an und zeichnen Sie diese in die Zeichnung ein.

a)

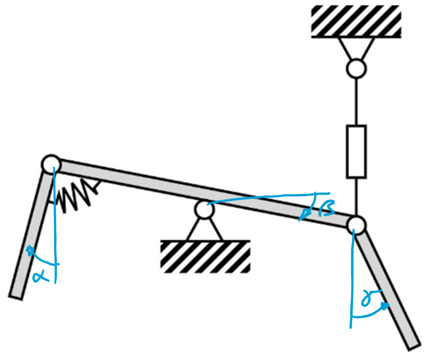


$f = 3$

$\mathbf{y} = [\ \alpha \quad \beta \quad \gamma\ ]$

(weitere Lösungsmöglichkeiten)

b)

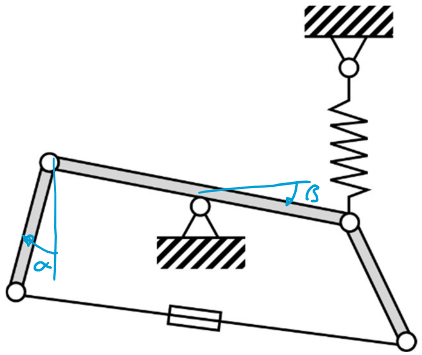


$f = 3$

$\mathbf{y} = [\ \alpha \quad \beta \quad \gamma\ ]$

(weitere Lösungsmöglichkeiten)

c)



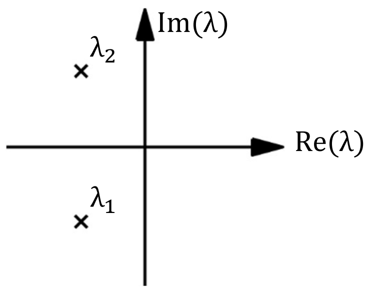
$f = 2$

$\mathbf{y} = [\ \alpha \quad \beta\ ]$

(weitere Lösungsmöglichkeiten)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Welche Stabilitätseigenschaften haben die folgenden linearen Systeme, die durch ihre Eigenwerte λ oder durch ihre Lösung $x(t)$ charakterisiert sind?

	asymptotisch stabil	grenzstabil	instabil	keine Aussage möglich
$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 3\lambda + 5)$	X			
$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$			X	
$\lambda_{1,2} = -3, \;\; \lambda_{3,4} = \pm 2i, \;\; d_{1,2} = 2$		X		
$x(t) = 2e^{-5t}\sin(3t)$	X			
	X			

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Klassifizieren Sie die folgenden Zwangsbedingungen. Es ist L konstant und t repräsentiert die Zeit. Alle anderen Größen sind implizit zeitabhängig.

	geometrisch	kinematisch	holonom	nicht-holonom	skleronom	rheonom
$4r_1 + r_2 = f(t)$	X		X			X
$\dot{r}_1 t = 5L$	X		X			X
$\dot{\alpha}\sin(\alpha) + \dot{\beta}\cos(\beta) = 0$		X	X		X	

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Bewerten Sie die folgenden Aussagen.

wahr	falsch	
☐	☒	Zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen müssen die Reaktionskräfte bekannt sein.
☐	☒	Hat ein System den Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, so ist das System stets grenzstabil.
☒	☐	Die Fundamentalmatrix kann mit $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{X} \cdot e^{\mathbf{\Lambda}t} \cdot \mathbf{X}^{-1}$ berechnet werden. Hierbei ist $\mathbf{X}$ die Modalmatrix und $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, wobei λ_i die Eigenwerte des Systems sind.
☒	☐	Mit den Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art können die Bewegungsgleichungen eines konservativen Mehrkörpersystems hergeleitet werden.
☒	☐	Stellt man den Trägheitstensor im Hauptachsensystem auf, verschwinden die Deviationsmomente.

Aufgabe 5 (18 Punkte)

Gegeben ist die lineare Bewegungsgleichung eines fremderregten, ungedämpften Zweimassenschwingers

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\Omega t).$$

Die Aufgabenteile d) bis g) sind unabhängig von den Aufgabenteilen a) bis c) lösbar.

a) Transformieren Sie das System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix}$ und dem Eingang $u = \cos(\Omega t)$ in den Zustandsraum.

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{= \mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}}_{= \mathbf{b}} u$$

Betrachten Sie zunächst das freie System.

b) Welche Formulierungen können zur Berechnung des charakteristischen Polynoms herangezogen werden?

- ☒ $p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$
- ☒ $p(\lambda) = \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \det(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{Q})$
- ☐ $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} + \lambda \mathbf{E})$
- ☐ $p(\lambda) = \det(\lambda^2 \mathbf{M} - \mathbf{Q})$

c) Das charakteristische Polynom ergibt sich für den betrachteten Zweimassenschwinger zu $p(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 6$. Berechnen Sie die Eigenwerte sowie die beiden linear unabhängigen Eigenvektoren der mechanischen Darstellung.

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}\, i$, $\quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3}\, i$

(andere Reihenfolge ebenfalls möglich; Eigenvektor muss aber zum Eigenwert passen)

$$\tilde{\mathbf{y}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{y}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(weitere Lösungsmöglichkeiten (Skalierung))

Betrachten Sie nun das fremderregte System mit $\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\Omega t)$.

d) Formulieren Sie den Erregervektor in der komplexen Darstellung.

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} e^{i\Omega t} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} e^{-i\Omega t}$$

e) Welche Formulierungen können zur Berechnung der Frequenzgangmatrix herangezogen werden?

- ☐ $\mathbf{F} = (\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{Q})^{-1}$
- ☒ $\mathbf{F} = \frac{\operatorname{adj}(-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{Q})}{\det(-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{Q})}$
- ☒ $\mathbf{F} = (-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{Q})^{-1}$
- ☐ $\mathbf{F} = \Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{Q}$

f) Für das betrachtete System ist die Frequenzgangmatrix durch

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\Omega^4 - 20\Omega^2 + 24} \begin{bmatrix} 5 - 2\Omega^2 & 1 \\ 1 & 5 - 2\Omega^2 \end{bmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie den Amplitudenvektor der stationären Systemantwort $\mathbf{x}_{H_\infty} = \mathbf{q}_0 e^{i\Omega t} + \overline{\mathbf{q}}_0 e^{-i\Omega t}$.

$$\mathbf{q}_0 = \frac{1}{4\Omega^4 - 20\Omega^2 + 24} \begin{bmatrix} 2 - \Omega^2 \\ -2 + \Omega^2 \end{bmatrix}$$

g) Welche Phänomene können bei harmonischer Anregung des Systems durch $\mathbf{h}(t)$ bei den angegebenen Anregungsfrequenzen Ω auftreten?

Anregungsfrequenz Ω in $\frac{1}{s}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$
strenge Resonanz			X	
Scheinresonanz		X		
Resonanzerscheinung				
kein besonderes Phänomen	X			X

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Ein lineares System mit den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 4i$ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Lage $y_0 = 1$ mit der Geschwindigkeit $\dot{y}_0 = 3.5$ losgelassen. Die allgemeine Lösung lautet $y(t) = e^{-\delta t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit aus der allgemeinen Lösung.

$\dot{y}(t) = -\delta e^{-\delta t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$
$+ e^{-\delta t}(-c_1 \omega \sin(\omega t) + c_2 \omega \cos(\omega t))$

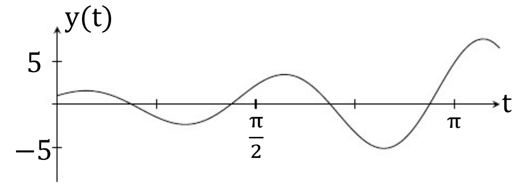
b) Wie lauten die Konstanten δ und ω?

$\delta =$ 0.5 , $\omega =$ 4

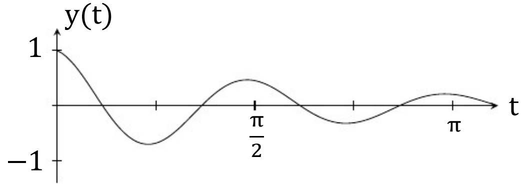
c) Bestimmen Sie die unbekannten Konstanten c_1 und c_2 aus den Anfangsbedingungen.

$c_1 =$ 1 , $c_2 =$ 1

d) Im Folgenden sind Verläufe der Lösung dargestellt, die alle falsch sind. Geben Sie zu jeder Lösung einen Grund an, warum sie nicht der tatsächlichen Lösung entsprechen kann.



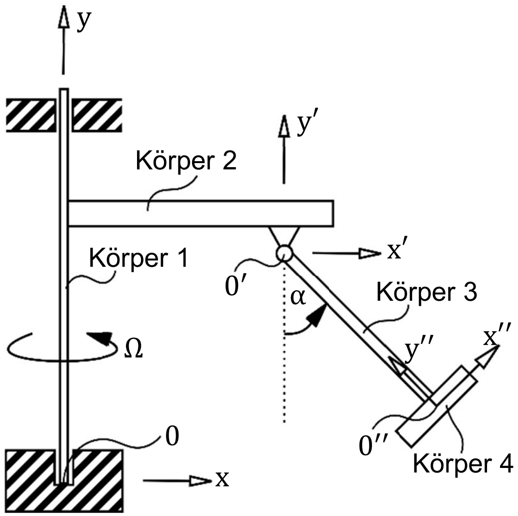
Die abgebildete Lösung ist nicht gedämpft.



Die Anfangsgeschwindigkeit der dargestellten Lösung ist negativ.

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Die Kinematik eines Mehrkörpersystems soll analysiert werden. Ein Stab (Körper 1) und der daran befestigte Arm (Körper 2) rotieren mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω um das Inertialsystem $\mathrm{K}\{0,\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}\}$. An dem Arm befindet sich ein Pendel (Körper 3), welches sich um das mitrotierte System $\mathrm{K}'\{0',\mathrm{x}',\mathrm{y}',\mathrm{z}'\}$ dreht. Die Drehung erfolgt ausschließlich in der x'-y'-Ebene. Das Pendel besitzt das körperfeste System $\mathrm{K}''\{0'',\mathrm{x}'',\mathrm{y}'',\mathrm{z}''\}$. Am Ende des Pendels befindet sich ein homogener Kreiszylinder (Körper 4, Radius R, Masse m, Dicke h, Schwerpunkt $0''$). Die Bewegung des Mehrkörpersystems wird mit der verallgemeinerten Koordinate $\mathbf{y} = \alpha$ beschrieben. Für $\mathrm{t} = 0$ und $\alpha = 0$ sind K, K' und K'' gleich orientiert.



a) Aus welchen Elementardrehungen setzt sich die Rotation des Kreiszylinders (Körper 4) gegenüber dem Inertialsystem $\mathrm{K}\{0,\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}\}$ zusammen?

	positive	negative				
1.	☒	☐	Drehung um	☐ x	☒ y	☐ z
2.	☒	☐	Drehung um	☐ x′	☐ y′	☒ z′

b) Geben Sie den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_4$ des Kreiszylinders bezüglich des Inertialsystems im Inertialsystem an.

$$\boldsymbol{\omega}_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & 0 & \sin(\Omega t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\Omega t) & 0 & \cos(\Omega t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_{\mathrm{KK}'}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

c) Drücken Sie die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_4$ mit der Jacobi-Matrix der Rotation $\mathbf{J}_{\mathrm{R}2}$ und dem lokalen Winkelgeschwindigkeitsvektor $\bar{\boldsymbol{\omega}}_4$ aus.

$$\boldsymbol{\omega}_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} \sin(\Omega t) \\ 0 \\ \cos(\Omega t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{\mathrm{R}4}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_4}$$

d) Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}_4$ des Kreiszylinders, indem Sie den lokalen Beschleunigungsvektor $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_4$ berechnen.

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{J}_{\mathrm{R}4} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\alpha}\Omega\cos(\Omega t) \\ 0 \\ -\dot{\alpha}\Omega\sin(\Omega t) \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_4}$$

e) Wie lautet der Trägheitstensor des Kreiszylinders bezüglich $0''$ im System K''?

$$\mathbf{I}_{4,\mathrm{K}''} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(3R^2+h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3R^2+h^2) \end{bmatrix}$$

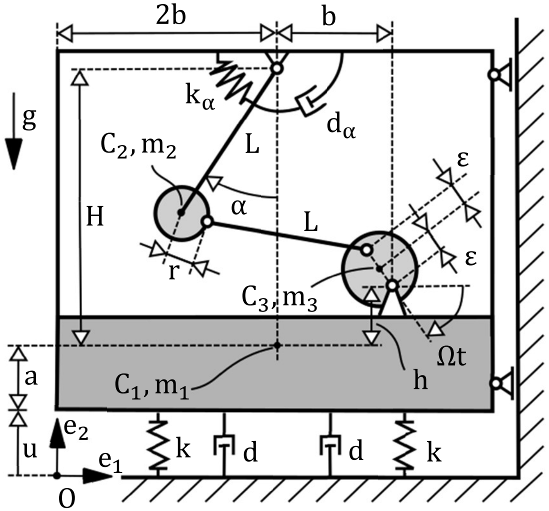
f) Wie berechnet sich der Trägheitstensor des Kreiszylinders bezüglich $0''$ im System K?

Hinweis: Der Trägheitstensor $\mathbf{I}_{4,\mathrm{K}''}$ sowie die Drehmatrizen $\mathbf{S}_{\mathrm{KK}'}$ und $\mathbf{S}_{\mathrm{KK}''}$ dürfen zur Darstellung des Ergebnisses verwendet werden.

$$\mathbf{I}_{4,\mathrm{K}} = \underline{\underline{S}}_{KK''} \cdot \underline{\underline{I}}_{4,K''} \cdot \underline{\underline{S}}_{KK''}^{T}$$

Aufgabe 8 (16 Punkte)

Ein reibungsfrei gelagerter Kasten (Körper 1, Schwerpunkt C_1, Masse m_1) ist gegenüber der Umgebung mit Feder-Dämpfer-Elementen (Federsteifigkeiten k, Dämpferkonstanten d, ungespannte Federlänge u_0) gekoppelt. Im Kasten befindet sich ein Pendel mit masselosem Stab, an welchem der Pendelkörper (Körper 2, Schwerpunkt C_2, Masse m_2) befestigt ist. Das Pendel ist mit einer Drehfeder (Drehsteifigkeit k_α) und einem Drehdämpfer (Dämpferkonstante d_α) gegenüber dem Kasten gekoppelt. Die Drehfeder ist für $\alpha = \alpha_0$ momentenfrei. Im Kasten rotiert eine Scheibe (Körper 3, Schwerpunkt C_3, Masse m_3, konstante Winkelgeschwindigkeit Ω), die mit Körper 2 über einen masselosen Stab verbunden ist. Das System ist eben.



a) Welcher Vektor der verallgemeinerten Koordinaten eignet sich zur Beschreibung der Kinematik?

☐ $\mathbf{y} = [u \quad \Omega]^T$

☒ $\mathbf{y} = [u \quad \alpha]^T$

☐ $\mathbf{y} = [u \quad \Omega \quad \alpha]^T$

b) Wie lauten die Ortsvektoren zu den Körperschwerpunkten C_2 und C_3?

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 2b - L\sin\alpha \\ a + u + H - L\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 3b - \varepsilon\cos(\Omega t) \\ a + u + h + \varepsilon\sin(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von Körper 2 und die Winkelgeschwindigkeit von Körper 3 in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten.

d)

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -L\cos\alpha \\ 1 & L\sin\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega \end{bmatrix}$$

e) Bestimmen Sie die eingeprägten Kräfte und Momente auf Körper 1.

$$\mathbf{f}_1^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -2k(u-u_0) - 2d\dot{u} - m_1 g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_1^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_\alpha(\alpha - \alpha_0) - d_\alpha\dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

f) Welche Gleichungen der Kinetik müssen zwingend in den Newton-Euler-Gleichungen berücksichtigt werden, um die Bewegungsgleichungen herzuleiten?

☒ Newtonsche Gleichungen des Kastens (Körper 1)

☐ Eulersche Gleichung des Kastens (Körper 1)

☒ Newtonsche Gleichungen des Pendelkörpers (Körper 2)

☒ Eulersche Gleichung des Pendelkörpers (Körper 2)

☒ Newtonsche Gleichungen der Scheibe (Körper 3)

☐ Eulersche Gleichung der Scheibe (Körper 3)

g) Wie werden die Bewegungsgleichungen aus den Newton-Euler-Gleichungen bestimmt und welches Prinzip der Mechanik wird dafür angewendet?

Linksmultiplikation mit transponierter globaler Jacobi-Matrix ($\bar{J}^T$)
Prinzip von d'Alembert

h) Bewerten Sie folgende Aussagen in Bezug auf das betrachtete System.

wahr	falsch	
☒	☐	Die Bewegungsgleichungen sind verkoppelt.
☒	☐	Die Bewegungsgleichungen sind explizit zeitabhängig.
☐	☒	Die Bewegungsgleichungen können mit Hilfe der Fundamentalmatrix gelöst werden.
☐	☒	Die Reaktionsgleichungen sind linear in $\mathbf{y}$ und $\dot{\mathbf{y}}$.

ENDE