23. März 2021

Prüfung in Maschinendynamik

Nachname, Vorname	
Matr.-Nummer	Fachrichtung
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	

1. Die Prüfung umfasst 8 Aufgaben und besteht aus 5 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

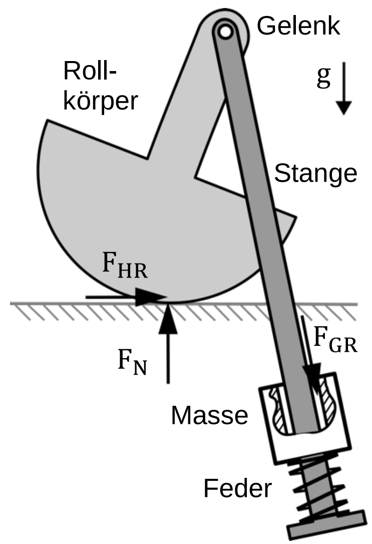
....

(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Das abgebildete, ebene Mehrkörpersystem besteht aus einem Rollkörper, der ohne zu gleiten auf einer Ebene rollt. Am oberen Gelenk des Rollkörpers ist eine Stange angebracht, auf der eine weitere Masse reibungsfrei gleitet. Die Masse ist mit der Stange über eine Feder gekoppelt.



a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

$f =$ _ _ _ _ _

b) Geben Sie einen geeigneten Vektor der verallgemeinerten Koordinaten an. Tragen Sie die gewählten verallgemeinerten Koordinaten in die Skizze ein.

$\mathbf{y} = [\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_]^T$

c) Bestimmen Sie für das ebene Mehrkörpersystem zusätzlich die Anzahl der Freiheitsgrade des ungebundenen Systems f^u, die unabhängigen Lagerwertigkeiten n sowie die überzähligen Lagerreaktionen r.

$f^u =$ _ _ _ , $n =$ _ _ _ , $r =$ _ _ _

d) Klassifizieren Sie die folgenden, im System auftretenden Kräfte.

	eingeprägte Kraft	Reaktions-kraft	ideale Kraft	nichtideale Kraft
Federkraft				
Gleitreibungskraft F_{GR}				
Kraft im Gelenk				
Normalkraft F_N				
Haftreibungskraft F_{HR}				
Gewichtskraft der Stange				

Aufgabe 2 (7 Punkte)

a) Welche Stabilitätseigenschaften haben die folgenden linearen Systeme, die durch ihre Eigenwerte λ oder durch ihre Lösung $x(t)$ charakterisiert sind?

	asymptot. stabil	grenz-stabil	instabil	keine Aussage möglich
(1) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$				
(2) $x(t) = x_0\, e^{-2t} \cos(t)\,, x_0 \in \mathbb{R}$				
(3) $\lambda_{1,2} = \pm\, 2i,\ \lambda_{3,4} = -\sqrt{7} \pm 4i$				
(4) $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$				

b) Klassifizieren Sie die folgenden Zwangsbedingungen. Es sind L, ω konstant und t repräsentiert die Zeit. Alle anderen Größen sind implizit zeitabhängig.

	geometrisch	kinematisch	holonom	nicht-holonom	skleronom	rheonom
$2r_x^2 + r_y^2 = L$						
$\dot{r}_x = \omega \sin(\omega t)$						
$\alpha = \omega t + \sin(\omega t)$						

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Ein ungedämpftes Feder-Masse-Pendel wird durch die Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$$

beschrieben. Die Fundamentalmatrix des Pendels ergibt sich mit dimensionsloser Zeit t zu

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi t) & \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t) \\ -2\pi\sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{bmatrix}.$$

Zum Zeitpunkt $t_1 = 1.25$ ist $x_1(t_1) = 1$ und $x_2(t_1) = -\pi$.

a) Geben Sie an, wie die Fundamentalmatrix allgemein als unendliche Reihe dargestellt werden kann.

_ _

b) In welchem Zustand befindet sich das Pendel zum Zeitpunkt $t_2 = 2.5$?

$x_1(t_2) =$ _ _ _ _ _ _ , $\qquad x_2(t_2) =$ _ _ _ _ _ _

c) Wie lässt sich die Systemmatrix $\mathbf{A}$ aus der Fundamentalmatrix bestimmen?

☐ $\mathbf{A} = \det \mathbf{\Phi}(t)\, \mathbf{\Phi}(t)^{-1}$ ☐ $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{\Phi}}(t) \cdot \mathbf{\Phi}(-t)$

☐ $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{\Phi}}(t) \cdot \mathbf{\Phi}(t)^{-1}$ ☐ $\mathbf{A} = \mathrm{sp}\, \mathbf{\Phi}(0)\, \dot{\mathbf{\Phi}}(t)$

d) Berechnen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems lauten

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \sin\beta \\ -\dot{\alpha}^2 \sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Der Zustandsvektor ist $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}]^T$ und der Eingang $u = M$.

a) Bestimmen Sie die nichtlineare Zustandsgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ in Abhängigkeit der Zustände $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ und des Eingangs u.

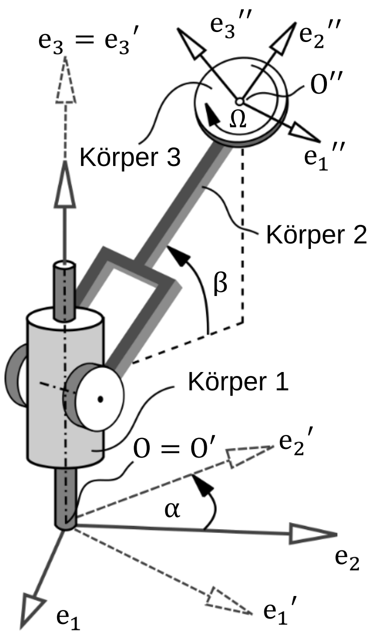
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

b) Aufgrund welcher Eigenschaft der Massenmatrix kann die nichtlineare Zustandsgleichung in dieser Form aufgestellt werden?

_ _

Aufgabe 5 (14 Punkte)

Die Kinematik eines Roboters mit einem rotierenden Schneidewerkzeug (Körper 3, Durchmesser d, Dicke s, Masse m) soll analysiert werden. Der Grundkörper (Körper 1) rotiert um die e_3-Achse des Inertialsystems $\mathrm{K}\{0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$. Der Roboterarm (Körper 2) rotiert um das mitrotierte System $\mathrm{K}'\{0', \mathrm{e}_1', \mathrm{e}_2', \mathrm{e}_3'\}$ und besitzt das körperfeste System $\mathrm{K}''\{0'', \mathrm{e}_1'', \mathrm{e}_2'', \mathrm{e}_3''\}$. Am Ende des Roboterarms befindet sich das Schneidewerkzeug, welches mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω dreht. Als Vektor der verallgemeinerten Koordinaten wird $\mathbf{y} = [\alpha \quad \beta]^{\mathrm{T}}$ gewählt. Für $\mathrm{t} = 0$, $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ sind K, K' und K'' gleich orientiert.



a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

$\mathrm{f} =$ _ _ _ _ _

b) Wie lautet der Trägheitstensor des Schneidewerkzeugs im System K''?

$$\mathbf{I}_{3,\mathrm{K}''} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

c) Aus welchen Elementardrehungen setzt sich die Rotation des Schneidewerkzeugs gegenüber dem Inertialsystem $\mathrm{K}\{0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$ zusammen?

	positive	negative				
1.	☐	☐	Drehung um	☐ e_1	☐ e_2	☐ e_3
2.	☐	☐	Drehung um	☐ e_1'	☐ e_2'	☐ e_3'
3.	☐	☐	Drehung um	☐ e_1''	☐ e_2''	☐ e_3''

d) Geben Sie den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_3$ des Schneidewerkzeugs (Körper 3) bezüglich des Inertialsystems im Inertialsystem an.

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_{\mathrm{KK}'}} \cdot \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_{\mathrm{KK}''}} \cdot \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}$$

e) Drücken Sie die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_3$ mit der Jacobi-Matrix der Rotation $\mathbf{J}_{\mathrm{R}3}$ und dem lokalen Winkelgeschwindigkeitsvektor $\bar{\boldsymbol{\omega}}_3$ aus.

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{\mathrm{R}3}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_3}$$

f) Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}_3$ des Körpers 3, indem Sie den lokalen Beschleunigungsvektor $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3$ berechnen.

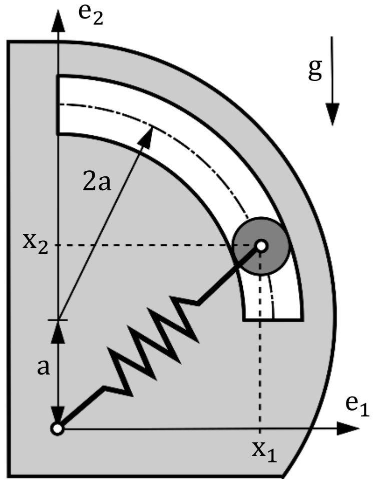
$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{J}_{\mathrm{R}3} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3}$$

g) Wie berechnet sich der Trägheitstensor des Schneidewerkzeugs im System K? ***Hinweis:*** Der Trägheitstensor $\mathbf{I}_{3,\mathrm{K}''}$ sowie die Drehmatrizen $\mathbf{S}_{\mathrm{KK}'}$ und $\mathbf{S}_{\mathrm{KK}''}$ dürfen zur Darstellung des Ergebnisses verwendet werden.

$\mathbf{I}_{3,\mathrm{K}} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Ein Massepunkt (Masse m) gleitet reibungsfrei in einer kreisförmigen, ebenen Führung und ist mit einer Feder (Federsteifigkeit k, ungespannte Länge u_0) verbunden. Die Lage des Massepunkts wird durch die kartesischen Koordinaten x_1 und x_2 beschrieben, der Lagevektor des freien Systems ist $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$.



a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

$f =$ _ _ _ _ _

b) Wie lautet die Bindungsgleichung in impliziter Form?

$\varphi(\mathbf{x}) =$ _

c) Geben Sie den Ortsvektor und die Jacobi-Matrix des Massepunkts als Funktion der verallgemeinerten Koordinate $y = x_1$ an.

$$\mathbf{r}(x_1) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_T(x_1) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

d) Welche Beziehung besteht zwischen der globalen Jacobi-Matrix $\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{J}_T$ und der globalen Verteilungsmatrix $\bar{\mathbf{Q}}$ und was sagt diese Beziehung aus?

_ _

_ _

e) Vervollständigen Sie die globale Verteilungsmatrix $\bar{\mathbf{Q}}$ in Abhängigkeit von x_1. Zeichnen Sie die Reaktionskraft in die Skizze ein und bezeichnen Sie diese mit $\mathbf{f}^r$.

$$\bar{\mathbf{Q}}(x_1) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems lauten

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2\cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\cos\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(\mathbf{y},t)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1.5\sin\alpha\,(3\dot{\alpha}^2 - 0.2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2z_2 - 2\dot{z}_2 - 1 \\ -z_1 - 2\dot{z}_1 + 1 + F \\ -\alpha - 5\sin\alpha - \dot{\alpha} \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)}$$

Diese sollen für kleine Auslenkungen und Geschwindigkeiten um den Arbeitspunkt $\mathbf{y}_s = [0, 0, \pi/3]^T, \dot{\mathbf{y}}_s = \mathbf{0}$ linearisiert werden. Es gilt $\mathbf{y} = \mathbf{y}_s + \boldsymbol{\eta}$, wobei $\boldsymbol{\eta}$ den Vektor der linearen verallgemeinerten Koordinaten darstellt, und $\ddot{\mathbf{y}}_s = \mathbf{0}$.

Hinweis: Im Allgemeinen lautet die linearisierte Form der oben dargestellten Bewegungsgleichungen

$$\underbrace{\mathbf{M}(\mathbf{y}_s,t)}_{\widetilde{\mathbf{M}}(t)} \cdot \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\left.\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s} - \left.\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s}\right)}_{\mathbf{P}(t)} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\left.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_s + \left.\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s} - \left.\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s}\right)}_{\mathbf{Q}(t)} \cdot \boldsymbol{\eta}$$
$$= \underbrace{\mathbf{q}(\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s,t) - \mathbf{k}(\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s,t) - \mathbf{M}(\mathbf{y}_s,t)\cdot\ddot{\mathbf{y}}_s}_{\mathbf{h}(t)}.$$

a) Bestimmen Sie die linearisierte Bewegungsgleichung, indem Sie die linearisierte Massenmatrix $\widetilde{\mathbf{M}}$, die Matrix der geschwindigkeitsabhängigen Kräfte $\mathbf{P}$, die Matrix der lageabhängigen Kräfte $\mathbf{Q}$ und den Erregervektor $\mathbf{h}$ angeben.

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix},$$

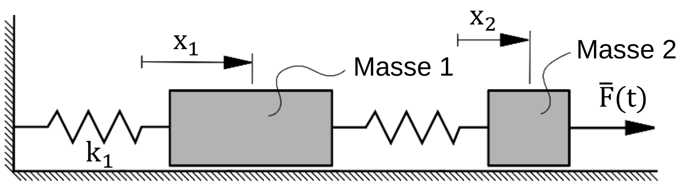
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

b) Welche Arten von Kräften treten in den linearisierten Bewegungsgleichungen dieses Systems auf?

- ☐ nichtkonservative Lagekräfte
- ☐ Erregerkräfte
- ☐ konservative Kräfte
- ☐ Dämpfungskräfte
- ☐ Reaktionskräfte
- ☐ gyroskopische Kräfte

Aufgabe 8 (19 Punkte)

Der abgebildete Zwei-Massen-Schwinger ist über Linearführungen reibungsfrei gelagert. Die Kinematik des Systems wird durch die verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y} = [x_1,\ x_2]^T$ beschrieben, wodurch sich folgende Bewegungsgleichungen in Abhängigkeit der Federsteifigkeit $k_1 > 0$ ergeben



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{F}(t).$$

a) Klassifizieren Sie das System.

☐ linear ☐ konservativ ☐ zwangserregt ☐ gyroskopisch
☐ nichtlinear ☐ nicht konservativ ☐ frei ☐ nicht gyroskopisch

Zunächst wird das freie System betrachtet.

b) Wie kann allgemein das charakteristische Polynom in Abhängigkeit der Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{Q}$ berechnet werden?

$q(\lambda) =$ ______________________________

c) Berechnen Sie das charakteristische Polynom in Abhängigkeit von λ und k_1.

$q(\lambda) =$ ______________________________

d) Berechnen Sie die Eigenwerte und die dazu gehörigen Eigenvektoren für $k_1 = 8$.

$\lambda_{1,2} =$ ____________ $\lambda_{3,4} =$ ____________

$\tilde{\mathbf{y}}_{1,2} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$ $\tilde{\mathbf{y}}_{3,4} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

e) Skizzieren Sie die beiden Eigenformen für $k_1 = 8$.

f) Kreuzen Sie Zutreffendes an, falls zwischen den Massen noch ein Dämpfer mit Dämpferkonstante $d > 0$ angebracht wird.

☐ Die Eigenwerte ändern sich nicht. ☐ Ein Eigenwertpaar verändert sich. ☐ Alle Eigenwerte verändern sich.

Nun wird das ungedämpfte, fremderregte System mit $\mathbf{k_1 > 0}$ und $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{t}) = \mathbf{4\,sin\,\Omega t}$ betrachtet.

g) Formulieren Sie den Erregervektor in der komplexen Darstellung.

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} e^{i\Omega t} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} e^{-i\Omega t}$$

h) Berechnen Sie die Frequenzgangsmatrix des Systems.
Hinweis: Die Frequenzgangsmatrix berechnet sich zu $\mathbf{F} = (-\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{Q})^{-1}$.

$\mathbf{F} =$ ―――――― $\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

i) Welchen Wert muss k_1 annehmen, dass die Masse 2 in Ruhe ist?

$k_1 =$ ______________________________

j) Ist es allgemein möglich, dass die Bewegung von Masse 1 ebenfalls verschwindet?

☐ ja ☐ nein ☐ keine Aussage möglich

k) Welche Phänomene können für die Anregungsfrequenzen $\Omega \in [0, \infty)$ im System auftreten?

	kann auftreten	kann nicht auftreten	keine Aussage möglich
strenge Resonanz			
Scheinresonanz			
Resonanzerscheinung			

ENDE