19. März 2019

Prüfung in Maschinendynamik

Nachname, Vorname	
MUSTERLÖSUNG MIT HINWEISEN	
Matr.-Nummer	Fachrichtung
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	

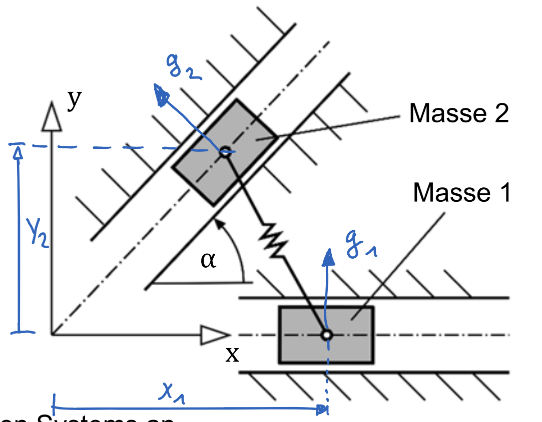
1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 90 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

P. Schmid
....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
Σ 71	PS

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bei dem dargestellten ebenen Mechanismus gleiten zwei Massepunkte reibungsfrei in Führungen. Die beiden Punktmassen, Masse 1 (Position x_1, y_1) sowie Masse 2 (Position x_2, y_2), sind mit einer Feder gekoppelt.



a) Wie viele Freiheitsgrade hat das ungebundene System?

$f^u =$ 4

b) Geben Sie den Lagevektor **x** des freien Systems an.

$\mathbf{x} = [\ x_1\ ,\ y_1\ ,\ x_2\ ,\ y_2\ ]^T$

c) Wie lauten die beiden Bindungsgleichungen in impliziter Form?

$\varphi_1(\mathbf{x}) =$ $y_1 = 0$

$\varphi_2(\mathbf{x}) =$ $y_2 - x_2 \tan(\alpha) = 0$ „Geradengleichung"

d) Bestimmen Sie die Zahl der unabhängigen Lagerwertigkeiten.

$n = \mathrm{Rg}\,\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}} =$ 2

e) Wie viele Freiheitsgrade hat das gebundene System?

$f =$ 2

f) Geben Sie einen geeigneten Vektor der verallgemeinerten Koordinaten an. Tragen Sie die gewählten verallgemeinerten Koordinaten in die Skizze ein.

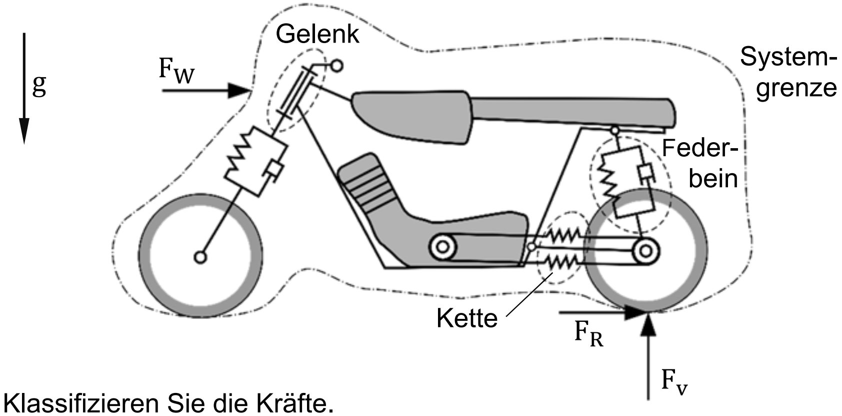
$\mathbf{y} = [\ x_1\ ,\ y_2\ ]^T$

g) Geben Sie einen geeigneten Vektor der verallgemeinerten Reaktionen an. Tragen Sie die gewählten verallgemeinerten Reaktionen in die Skizze ein.

$\mathbf{g} = [\ g_1\ ,\ g_2\ ]^T$

Aufgabe 2 (Punkte)

Die Dynamik eines Motorrads soll bei einem Bremsvorgang untersucht werden. Das Motorrad wird so gebremst, dass das Hinterrad blockiert.



a) Klassifizieren Sie die Kräfte.

	äußere Kraft	innere Kraft	eingeprägte Kraft	Reaktions-kraft
Kraft im Federbein		X	X	
Windkraft F_W	X		X	
Gewichtskraft	X		X	
Kraft in der Kette		X	X	
Kraft im Gelenk		X		X
Gleitreibungskraft F_R	X		X	
Radaufstandskraft F_v	X			X

b) Bewerten Sie die folgenden Aussagen bezüglich des betrachteten Systems.

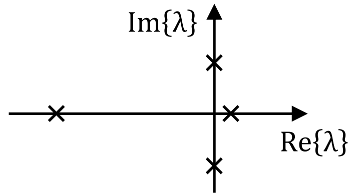
wahr	falsch	
☒	☐	Die Radaufstandskraft $F_V(t)$ kann aus den verallgemeinerten Reaktionen $\mathbf{g}(t)$ berechnet werden. (F_v ist eine Reaktionskraft)
☐	☒	Um den zeitlichen Verlauf der Radaufstandskraft $F_V(t)$ zu bestimmen, müssen nur die Reaktionsgleichungen hergeleitet werden.

die Bewegungsgleichungen müssen ebenfalls hergeleitet und gelöst werden, da $\underline{g} = \underline{g}(\underline{y}, \underline{\dot{y}}, t)$

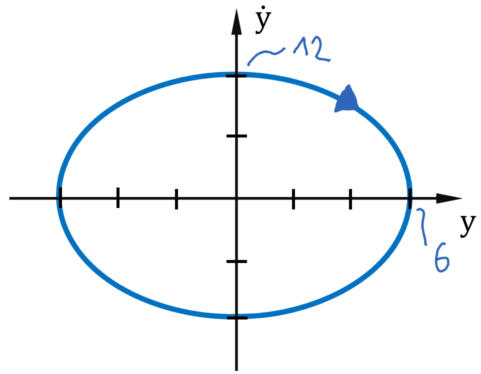
Aufgabe 3 (Punkte)

a) Welche Stabilitätseigenschaften haben die folgenden linearen Systeme?

Hinweis: Die Eigenwerte der linearen Systeme sind mit λ bezeichnet.

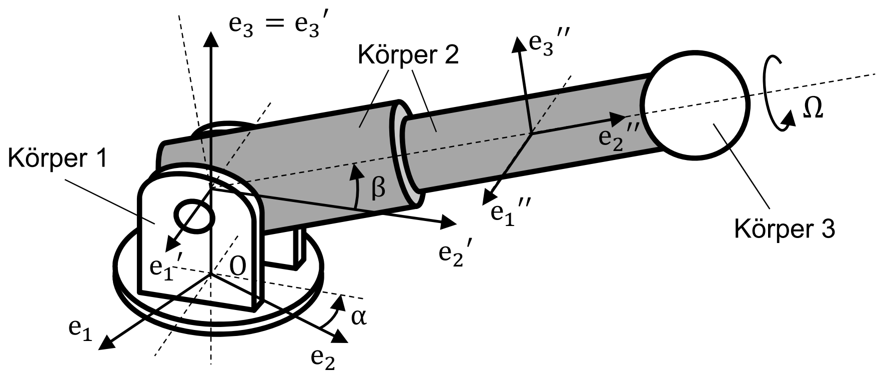
	asymptotisch stabil	grenzstabil	instabil	keine Aussage möglich
1: $\lambda_{1,2} = -5 \pm 6i, \ \lambda_3 = -4, \ \lambda_4 = -2$	X			
2: $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$			X	
3: $\lambda_{1,2} = -\sqrt{6} \pm \sqrt{2}\,i, \quad \lambda_{3,4} = \pm i$ $\lambda_{5,6} = -4 \pm 5\,i$		X		
4: 			X	

b) Die Lösung eines linearen Systems lautet $y(t) = 6\sin(2t)$. Skizzieren Sie das Phasenportrait der Lösung und beschriften Sie zusätzlich die beiden Achsen.



Aufgabe 4 (Punkte)

Die Kinematik eines Roboters soll untersucht werden. Der Roboter besteht aus einem drehbar gelagerten Grundkörper (Körper 1) und einem daran befestigten, drehbar gelagerten Arm (Körper 2). Am Ende des Arms befindet sich ein kugelförmiges Werkzeug (Körper 3), das sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω um die e_2''-Achse in positiver Richtung dreht. Die Bewegung des Mehrkörpersystems wird mit den verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y} = [\alpha, \beta]^T$ beschrieben. Das Inertialsystem ist durch $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ gegeben.



a) Aus welchen Elementardrehungen setzt sich die Drehung des Körpers 3 gegenüber dem Inertialsystem zusammen?

1. Drehung um	☐ e_1	☐ e_2	☒ e_3
2. Drehung um	☒ e_1'	☐ e_2'	☐ e_3'
3. Drehung um	☐ e_1''	☒ e_2''	☐ e_3''

b) Wie bezeichnet man die Drehwinkel für diese Drehreihenfolge?

☐ Kardan-Winkel ☐ Euler-Winkel

☒ keine eingeführte Bezeichnung ☐ Quaternionen

c) Geben Sie den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_3$ des Körpers 3 bezüglich des Inertialsystems im Inertialsystem an.

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot\beta\cos\alpha - \Omega\sin\alpha\cos\beta \\ \dot\beta\sin\alpha + \Omega\cos\alpha\cos\beta \\ \dot\alpha + \Omega\sin\beta \end{bmatrix}$$

d) Drücken Sie die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_3$ des Körpers 3 mit der Jacobi-Matrix der Rotation $\mathbf{J}_{R3}$ und dem lokalen Winkelgeschwindigkeitsvektor $\bar{\boldsymbol{\omega}}_3$ aus.

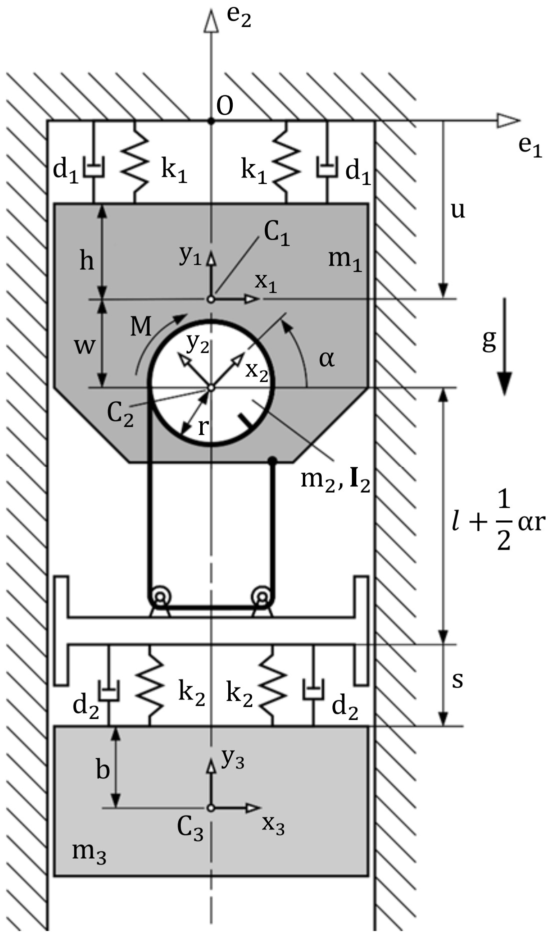
$$\boldsymbol{\omega}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{R3}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\Omega\sin\alpha\cos\beta \\ \Omega\cos\alpha\cos\beta \\ \Omega\sin\beta \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_3}$$

e) Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}_3$ des Körpers 3, indem Sie den lokalen Beschleunigungsvektor $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3$ berechnen.

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{J}_{R3} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\dot\alpha\dot\beta\sin\alpha + \Omega(\dot\beta\sin\alpha\sin\beta - \dot\alpha\cos\alpha\cos\beta) \\ \dot\alpha\dot\beta\cos\alpha - \Omega(\dot\alpha\sin\alpha\cos\beta + \dot\beta\cos\alpha\sin\beta) \\ \Omega\dot\beta\cos\beta \end{bmatrix}}_{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3}$$

Aufgabe 5 (Punkte)

Zur Untersuchung der Dynamik eines Aufzugs wird ein Mehrkörpermodell aus Grundkörper, Antriebseinheit und Last betrachtet. Der Grundkörper (Masse m_1, Schwerpunkt C_1) ist mit einer Feder-Dämpfer-Kombination (Federsteifigkeiten k_1, ungespannte Federlängen u_0, Dämpferkonstanten d_1) an der Decke aufgehängt. Die Antriebseinheit umfasst den Motor (rotierende Masse m_2, Schwerpunkt C_2, Trägheitstensor $\mathbf{I}_2$ bzgl. C_2), das Seil und die Aufhängung (beide masselos). Die Last (Masse m_3, Schwerpunkt C_3) ist mit der Aufhängung über eine Feder-Dämpfer-Kombination (Federsteifigkeiten k_2, ungespannte Federlängen s_0, Dämpferkonstanten d_2) verbunden. Auf die rotierende Masse wirkt das eingeprägte Motormoment M. Alle Führungen und Lagerungen sind reibungsfrei. Das Seil ist nicht dehnbar und stets gespannt.



Hinweis: Folgende Gruppierungen der Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar:

- a) bis e)
- f) bis h)
- i)
- j)

Alle Größen sind bezüglich des Inertialsystems $\{\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ anzugeben.

a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

$f = \underline{\quad 3 \quad}$

b) Welcher Lagevektor eignet sich zur Beschreibung der Kinematik des Systems?

- ☐ $\mathbf{y} = [s \quad u]^T$
- ☒ $\mathbf{y} = [s \quad u \quad \alpha]^T$
- ☐ $\mathbf{y} = [u \quad \alpha]^T$
- ☐ $\mathbf{y} = [s \quad u \quad \alpha \quad l]^T$

c) Geben Sie die Positionen der Schwerpunkte C_1, C_2 und C_3 sowie die Orientierungen des Grundkörpers und der Antriebseinheit.

Grundkörper:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Antriebseinheit:

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -u - w \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Last:

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -u - w - l - \frac{1}{2}\alpha r - s - b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_1$$

d) Bestimmen Sie die Beschleunigungen des Grundkörpers und der Last.

Grundkörper:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Last:

$$\mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2}r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung der Antriebseinheit.

$$\boldsymbol{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

f) Bestimmen Sie den Gesamtbetrag der Feder-Dämpfer-Kräfte zwischen dem Grundkörper und der Decke.

$$|F_{FD,1}| = 2k_1(u - h - u_0) + 2d_1\dot{u}$$

g) Bestimmen Sie den Gesamtbetrag der Feder-Dämpfer-Kräfte zwischen der Aufhängung und der Last.

$$|F_{FD,2}| = 2k_2(s - s_0) + 2d_2\dot{s}$$

h) Geben Sie die eingeprägten Kräfte und Momente auf die jeweiligen Körper bezüglich der Schwerpunkte an.

Grundkörper:

Anteil aus Feder-Dämpfer-Kombination zwischen Aufhängung und Last

$$\mathbf{f_1^e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2k_1(u-h-u_0) + 2d_1\dot{u} - m_1 g - k_2(s-s_0) - d_2\dot{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ist keine Reaktionskraft, da Seil und Aufhängung als masselos betrachtet werden

Antriebseinheit:

analog zu f_1^e

$$\mathbf{f_2^e} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g - k_2(s-s_0) - d_2\dot{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

analog zu oben

$$\mathbf{l_2^e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M + r\left[k_2(s-s_0) + d_2\dot{s}\right] \end{bmatrix}$$

i) Welche Gleichungen der Kinetik müssen zwingend in den Newton-Euler-Gleichungen berücksichtigt werden, um die Bewegungsgleichungen herzuleiten?

- ☒ Newtonsche Gleichungen des Grundkörpers
- ☐ Eulersche Gleichungen des Grundkörpers
- ☒ Newtonsche Gleichungen der Antriebseinheit
- ☒ Eulersche Gleichungen der Antriebseinheit
- ☒ Newtonsche Gleichungen der Last
- ☐ Eulersche Gleichungen der Last

j) Treten die Reaktionskräfte in den Bewegungsgleichungen des Aufzugs auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nein, da sie orthogonal zu den virtuellen Verschiebungen sind und so eliminiert werden. (Prinzip von d'Alembert)

Aufgabe 6 (Punkte)

Gegeben ist die lineare Bewegungsgleichung eines fremderregten, gedämpften Zweimassenschwingers

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}}_{\mathbf{M}}\cdot\ddot{\mathbf{y}}+\underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\-\sqrt{3} & \sqrt{3}\end{bmatrix}}_{\mathbf{P}}\cdot\dot{\mathbf{y}}+\underbrace{\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{y}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\mathrm{F}(t).$$

a) Transformieren Sie das System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}=[\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}}]^{\mathrm{T}}$ und dem Eingang $u=\mathrm{F}(t)$ in den Zustandsraum.

$$\dot{\mathbf{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\-1 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}}\cdot\mathbf{x}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}}_{=\mathbf{b}}u$$

b) Welche Formulierungen können zur Berechnung des charakteristischen Polynoms herangezogen werden?

☒ $p(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})$ ☒ $p(\lambda)=\dfrac{1}{\det(\mathbf{M})}\det(\lambda^2\mathbf{M}+\lambda\mathbf{P}+\mathbf{Q})$

☐ $p(\lambda)=\det(\mathbf{A}+\lambda\mathbf{E})$ ☐ $p(\lambda)=\det(\lambda^2\mathbf{M}+j\lambda\mathbf{P}+\mathbf{Q})$

Das charakteristische Polynom ergibt sich für den betrachteten Zweimassenschwinger zu $p(\lambda)=\left(\lambda^2+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda^2+\sqrt{3}\,\lambda+\frac{3}{2}\right)$.

c) Berechnen Sie die Eigenwerte.

$\lambda_{1,2}=\pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\lambda_{3,4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) Berechnen Sie die beiden linear unabhängigen Eigenvektoren der mechanischen Darstellung.

$$\tilde{\mathbf{y}}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\qquad\tilde{\mathbf{y}}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

e) Welche Phänomene können bei harmonischer Anregung des Systems durch $\mathrm{F}(t)$ bei den angegebenen Anregungsfrequenzen Ω_{E} auftreten?

Anregungsfrequenz Ω_{E} $\left[\frac{1}{s}\right]$	Phänomen		
	keine Resonanz	strenge Resonanz	Resonanzerscheinung
$\sqrt{2}/2$		X	
$\sqrt{3}/2$			X
$\sqrt{6}/2$	X		

f) Welche Phänomene können bei harmonischer Anregung des ungedämpften Systems $(\mathbf{P}=\mathbf{0})$ durch $\mathrm{F}(t)$ bei den angegebenen Anregungsfrequenzen Ω_{E} auftreten?

Anregungsfrequenz Ω_{E} $\left[\frac{1}{s}\right]$	Phänomen		
	keine Resonanz	strenge Resonanz	Resonanzerscheinung
$\sqrt{2}/2$		X	
$\sqrt{3}/2$	X		
$\sqrt{6}/2$		X	

aufgrund $\underline{\underline{P}}=\underline{\underline{0}}$ ergeben sich die Eigenwerte

$\tilde{\lambda}_{1,2}=\pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tilde{\lambda}_{3,4}=\pm j\frac{\sqrt{6}}{2}$

ENDE