Maschinendynamik

Prof. Dr.-Ing. Peter Eberhard

Vorlesung: Die Vorlesung wird hauptsächlich für die Studierenden der Studiengänge Maschinenbau, Mechatronik, Technologiemanagement, Technische Kybernetik, Fahrzeugtechnik und Mathematik angeboten. Der Inhalt wird während der Vorlesung mittels Tablet & Beamer aufgeschrieben (sodass die Studierenden mitschreiben können), erklärt und mit Merkblättern [M] ergänzt.

Übungen: Die Vorlesung wird in den Vortragsübungen durch das Vorrechnen von Aufgabenblätter [A] ergänzt, die unmittelbar auf den Vorlesungsstoff abgestimmt sind.

Seminar: Es finden zwei seminaristische Übungen mit verfügbaren Seminaraufgaben [S] statt. Dort lösen die Studierenden selbständig Aufgaben, während mehrere Tutoren für Fragen zur Verfügung stehen.

Ort/Zeit: Dienstag 11.30 - 13.00 Uhr, V 9.01
Donnerstag 8.00 - 9.30 Uhr, V 9.01

Dozent: Die Vorlesung wird von Prof. Dr.-Ing. Prof. E.h. P. Eberhard und Dr.-Ing. P. Ziegler gehalten, die Übungen werden von M. Vierneisel, M.Sc. gehalten.

Sprechstunden: Während der Vorlesungszeit finden Dienstag und Donnerstag von 13-14 Uhr im Sprechstundenbereich vor Raum 4.155 des Instituts Sprechstunden statt. Fragen, die in den Vorlesungen und Übungen offen geblieben sind, können dort besprochen werden. Darüber hinaus werden fachliche Auskünfte am Institut durch Herrn M. Vierneisel, M.Sc. (Zimmer 4.155, Tel.: 685 - 69866) erteilt.

Institut: Die Räume des Instituts für Technische und Numerische Mechanik befinden sich im Ingenieurwissenschaftlichen Zentrum (IWZ), Pfaffenwaldring 9, 3. und 4. Stock.

www: http://www.itm.uni-stuttgart.de

Unterlagen im Internet: Organisatorische Hinweise sowie aktuelle Unterlagen (Arbeitsblätter [A], Merkblätter [M], Seminaraufgaben [S]) finden Sie im Internet unter www.itm.uni-stuttgart.de/lehre/lehrveranstaltungen/maschdyn. Es ist empfehlenswert, diese Merkblätter, Arbeitsblätter und Seminaraufgaben im Voraus **auszudrucken**.

Prüfung: Die Prüfung findet im Wintersemester schriftlich statt. Der Termin der Prüfung steht noch nicht fest und ist im Laufe des Semesters in C@mpus zu erfahren.

Prüfungsanmeldung: Die Anmeldung erfolgt immer über C@mpus.

Hilfsmittel: In der Prüfung sind als Hilfsmittel ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Die Formelsammlung darf sowohl handschriftlich als auch digital erstellt sein und ausgedruckt mitgebracht werden. Elektronische Geräte (inkl. Taschenrechner) sind ausdrücklich nicht zugelassen.

Maschinendynamik

1 Einleitung

2 Modellbildung

3 Kinematische Grundlagen

3.1 Koordinatentransformation
3.2 Kinematik eines freien Massenpunktes
3.3 Kinematik eines freien starren Körpers
3.4 Bindungen
3.5 Holonome Mehrkörpersysteme

4 Kinetische Grundlagen

4.1 Kinetik des Massenpunkts
4.2 Kinetik des starren Körpers

5 Prinzipe der Mechanik

5.1 Virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte
5.2 Prinzip der virtuellen Arbeit
5.3 Prinzip von d'Alembert
5.4 Lagrangesche Gleichungen
5.4.1 Lagrangesche Gleichungen 1. Art
5.4.2 Energie
5.4.3 Lagrangesche Gleichungen 2. Art

6 Mehrkörpersysteme

6.1 Bewegungsgleichungen holonomer Mehrkörpersysteme
6.2 Reaktionsgleichungen
6.3 Formalismen für Mehrkörpersysteme
6.4 Linearisierung der Bewegungsgleichungen

7 Zustandsform mechanischer Schwingungssysteme

7.1 Zustandsvektor
7.2 Nichtlineare Zustandsgleichung
7.3 Lineare Zustandsgleichung
7.4 Transformation linearer Zustandsgleichungen

8 Allgemeine Lösung zeitinvarianter Schwingungssysteme

8.1 Anfangswertproblem
8.2 Fundamentalmatrix für Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden
8.3 Superpositionsprinzip

9 Freie Schwingungen

9.1 Schwinger mit einem Freiheitsgrad
9.2 Eigenwertaufgabe für Systeme in Zustandsform
9.3 Allgemeine Lösung des homogenen Schwingungssystems
9.4 Stabilität
9.5 Eigenwertproblem für gewöhnliche Mehrkörpersysteme

10 Erzwungene Schwingungen

10.1 Sprungerregung
10.2 Impulserregung
10.3 Harmonische Erregung
10.4 Resonanz und Scheinresonanz
10.5 Tilgung
10.6 Periodische Erregung

Literatur

1. Bestle, D.: Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen. Springer, Berlin, 1994.

2. Dresig, H. und Holzweißig, F.: Maschinendynamik. 11. Aufl., Springer, Heidelberg, 2012.

3. Eich−Soellner, E. und Führer, C.: Numerical Methods in Multibody Dynamics. Teubner, Stuttgart, 1998.

4. Haug, E.J.: Intermediate Dynamics. Prentice−Hall, Englewood Cliffs, 1992.

5. Krämer, E.: Maschinendynamik. Springer, Berlin, 1984.

6. Magnus, K.; Popp, K. und Sextro, W.: Schwingungen. 8. Aufl., Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.

7. Müller, P.C. und Schiehlen, W.: Lineare Schwingungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1976.

8. Nikravesh, P.E.: Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems. Prentice-Hall International Editions, Englewood Cliffs, 1988.

9. Rill, G.: Simulation von Kraftfahrzeugen. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1994.

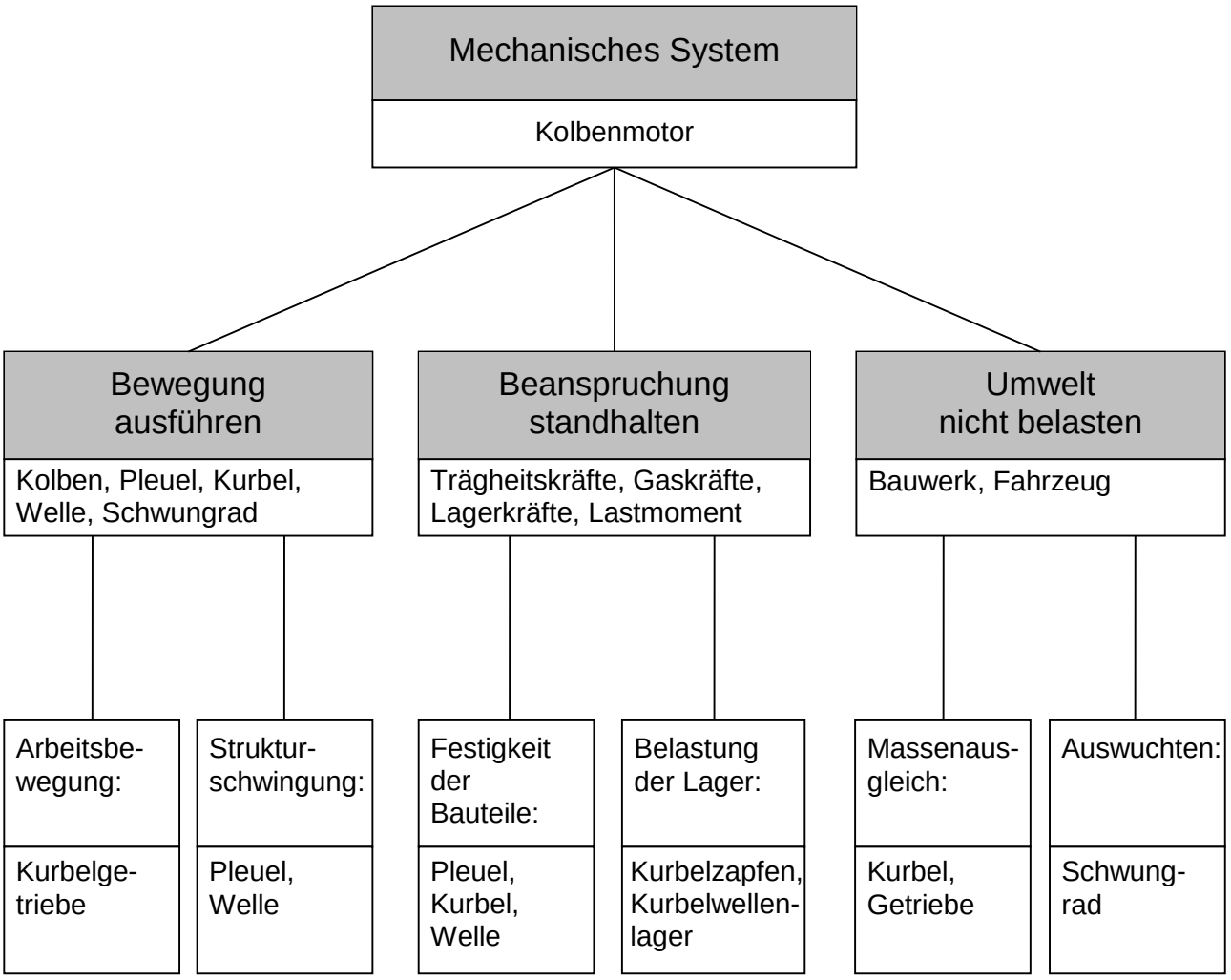
10. **Schiehlen, W. und Eberhard, P.: Technische Dynamik. 6. Aufl., Springer Vieweg, Wiesbaden, 2020.**

11. Schiehlen, W., Ed.: Multibody Systems Handbook. Springer, Berlin, 1990.

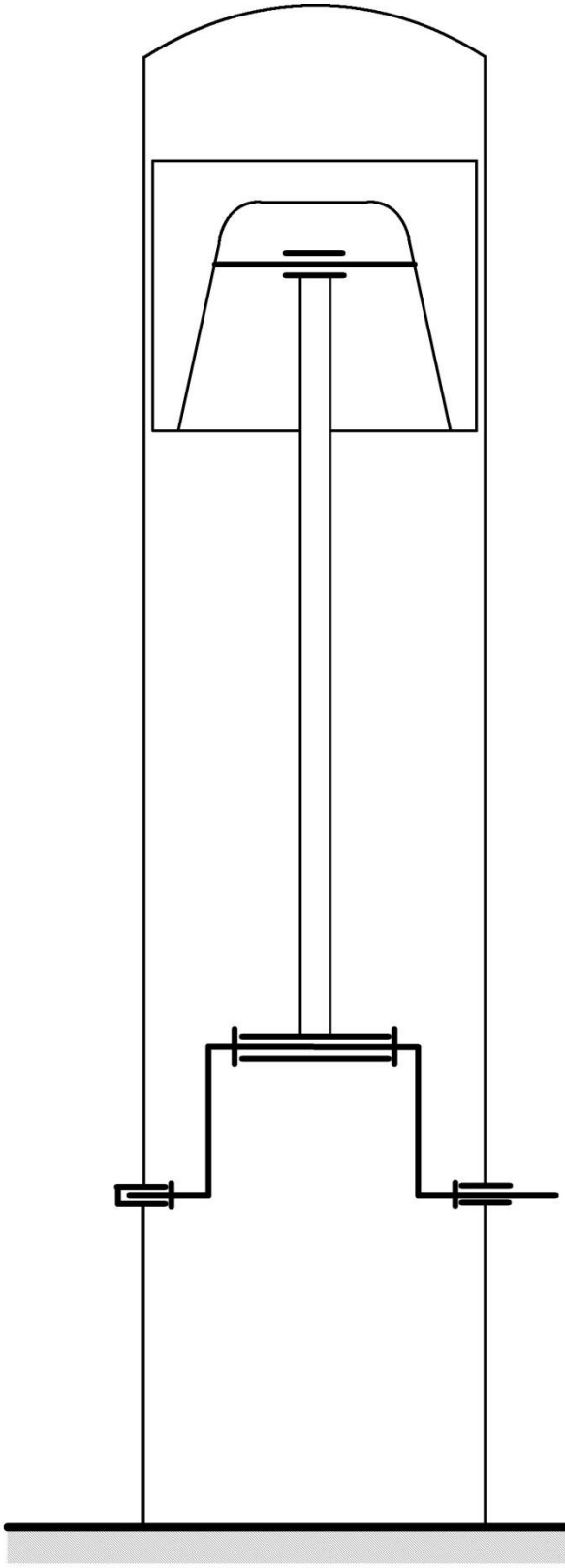
12. Shabana, A.A.: Dynamics of Multibody Systems, 5 ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2020.

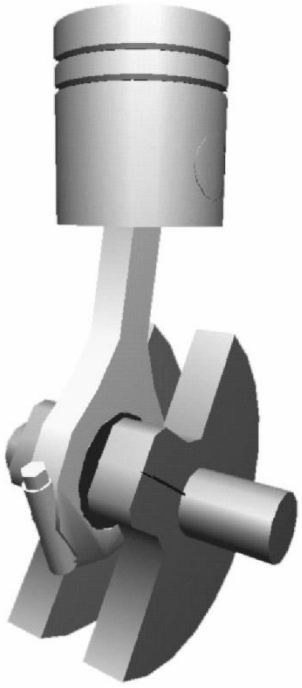
13. Woernle, C.: Mehrkörpersysteme, Eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper. 3. Aufl., Springer Vieweg, Heidelberg, 2021.

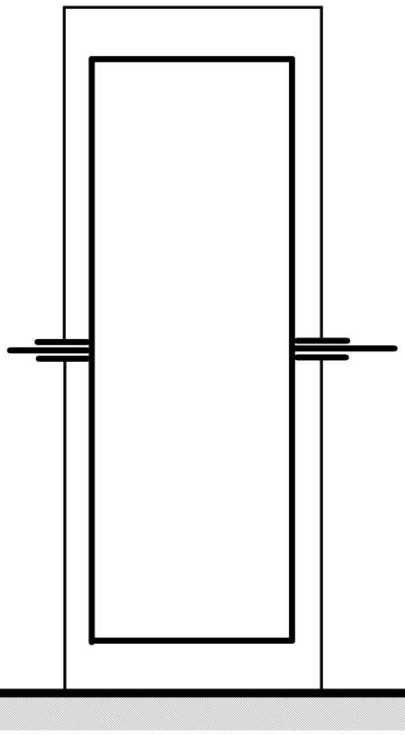
Aufgaben der Maschinendynamik



Einzylindermotor mit Schwungscheibe







Mathematische Hilfsmittel

Matrizenalgebra und Matrizenanalysis

Skalar $\mu \in \mathbb{R}$

Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R}$

Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ml} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}$

Elementare Operationen

Operation	Schreibweise	Koordinaten	Abbildung
Addition	$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$	$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$	$\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$
Multiplikation mit Skalar	$\mathbf{C} = \mu\, \mathbf{A}$	$C_{ij} = \mu\, A_{ij}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$
Transponieren	$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T$	$C_{ij} = A_{ji}$	$\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$
Differentiation	$\mathbf{C} = \frac{d}{dt}\mathbf{A}$ $\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}$	$C_{ij} = \frac{d}{dt} A_{ij}$ $C_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$	$\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ $\mathbb{R}^m, \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$
Matrizenmultiplikation	$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$y_i = \sum_k A_{ik}\, x_k$ $C_{ij} = \sum_k A_{ik}\, B_{kj}$	$\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{n\times p} \to \mathbb{R}^{m\times p}$
Inneres Produkt (Skalarprodukt)	$\mu = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$	$\mu = \sum_k x_k\, y_k$	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Äußeres Produkt (Dyadisches Produkt)	$\mathbf{A} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T$	$A_{ij} = x_i\, y_j$	$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$

Rechenregeln:

Addition:

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

Multiplikation mit Skalar:

$$\mu(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mu\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot(\mu\mathbf{B})$$

$$\mu(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mu\mathbf{A}+\mu\mathbf{B}$$

Transposition:

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

$$(\mu\mathbf{A})^{\mathrm{T}}=\mu\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

Differentiation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{A}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{B}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{B}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathbf{x}(\mathbf{y})=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{y}}\cdot\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}$$

Matrizenmultiplikation:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

aber i.a. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

Skalarprodukt:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x}\geq 0\quad\forall\mathbf{x}\quad,\qquad\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x}=0\Leftrightarrow\ \mathbf{x}=0$$

$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{y}=0\Leftrightarrow\mathbf{x},\mathbf{y}$ orthogonal

Quadratische Matrizen:

Einheitsmatrix

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\mathbf{D}=\mathrm{diag}\{\mathrm{d_i}\}=\begin{bmatrix}\mathrm{d}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{d_n}\end{bmatrix}$$

Inverse Matrix

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\mathrm{adj}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$$

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$$

Symmetrische Matrix $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$

Schiefsymmetrische Matrix $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

Zerlegung
$$\mathbf{A} = \underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})}_{\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})}_{\mathbf{C} = -\mathbf{C}^{\mathrm{T}}}$$

Schiefsymmetrische 3×3 Matrix
$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{a} \qquad \mathrel{\widehat{=}} \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$\Updownarrow$ Rösselsprung

$$\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{T}} - (\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{E} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$(\widetilde{\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{T}} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^{\mathrm{T}}$$

Symmetrische, positiv definite Matrix: $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} > 0 \;\forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow$ Hauptabschnittsdeterminante

$H_\alpha > 0, \;\; \alpha = 1(1)n$

$\Leftrightarrow$ Eigenwerte $\lambda_\alpha > 0, \;\; \alpha = 1(1)n$

Symmetrische, positiv semidefinite Matrix: $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \geq 0 \;\forall\, \mathbf{x}$

$\Leftrightarrow$ Eigenwerte $\lambda_\alpha \geq 0, \;\; \alpha = 1(1)n$

Symmetrische, negativ definite Matrix: $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} < 0 \;\forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow$ Hauptabschnittsdeterminante

$(-1)^\alpha H_\alpha > 0, \;\; \alpha = 1(1)n$

$\Leftrightarrow$ Eigenwerte $\lambda_\alpha < 0, \;\; \alpha = 1(1)n$

Symmetrische, negativ semidefinite Matrix: $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq 0 \;\forall\, \mathbf{x}$

$\Leftrightarrow$ Eigenwerte $\lambda_\alpha \leq 0, \;\; \alpha = 1(1)n$

Orthogonale Matrix $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$

Determinante
$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} A_{ik} B_{ik} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ik}$$

Adjungierte Matrix
$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Adjunkte eines Elementes einer Matrix

$$B_{ik} = (-1)^{i+k} \det \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ A_{i-1,1} & & & & & A_{i-1,n} \\ A_{i+1,1} & & & & & A_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,k-1} & A_{n,k+1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Komplexe Zahlen

$u = a + ib, \qquad v = c + id, \qquad i^2 = -1$

Konjugiert komplexe Zahl: $u^* = a - ib, \quad v^* = c - id$

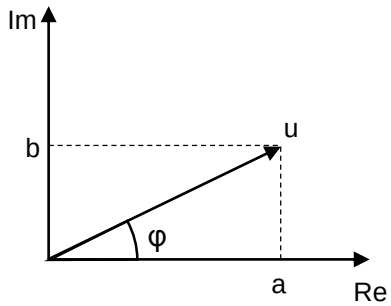
Polardarstellung

$u = r\,e^{i\varphi} \qquad u^* = r\,e^{-i\varphi}$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}$

$a = r\cos\varphi \qquad b = r\sin\varphi$

$v = R\,e^{i\psi}$



Regeln

$u \pm v = (a \pm c) + i(b \pm d)$

$u\,v = (a\,c - b\,d) + i(a\,d + b\,c) = r\,R\,e^{i(\varphi+\psi)}$

Äquivalente Darstellung harmonischer Funktionen $h(t) \in R$

$h(t) = h_0\,e^{i\omega t} + h_0^*\,e^{-i\omega t}$

Euler-Formel: $e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$

$h^c = h_0 + h_0^* \qquad h_0 = \frac{1}{2}(h^c - ih^s)$

$h^s = i(h_0 - h_0^*)$

$= h^c\,\cos\omega t + h^s\,\sin\omega t$

Trigonometrie: $\cos(\omega t - \varphi) = \cos\varphi\,\cos\omega t + \sin\varphi\,\sin\omega t$

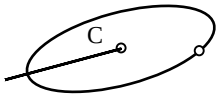
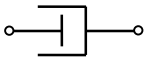
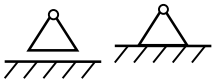
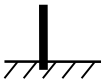
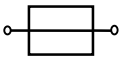
$a = \sqrt{(h^c)^2 + (h^s)^2} \qquad h^c = a\,\cos\varphi$

$\varphi = \arctan\frac{h^s}{h^c} \qquad h^s = a\,\sin\varphi$

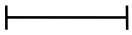
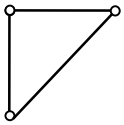
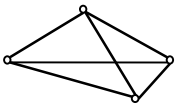
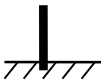
$= a\,\cos(\omega t - \varphi)$

Modellelemente

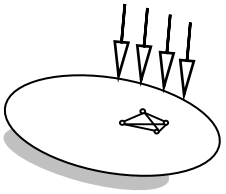
Mehrkörpersysteme (MKS)

Idealisierungen	▪ starre, massebehaftete Körper (Trägheit) ▪ masselose Koppelelemente (eingeprägte Kräfte und Momente) ▪ starre, reibungsfreie Bindungselemente (Reaktionskräfte und −momente)		
Symbole	**Körper**		
	starrer Körper		Masse m Trägheitstensor I
	Massenpunkt		Masse m
	Koppelelemente		
	Feder		Steifigkeit c ungespannte Länge l_0
	Dämpfer		Dämpfung d
	Kraftstellglied		Kraftsteuerung $F(t)$
	Bindungselemente		
	Stab		
	Gelenklager		
	feste Einspannung		
	Lagestellglied		Bewegungssteuerung $l(t)$
Anwendung	Fahrzeugdynamik, Rotordynamik, Robotik, Biomechanik, …		
Sonderfall	Massenpunktsysteme		

Finite−Elemente−Systeme (FES)

Idealisierungen	▪ massebehaftete Elemente mit festgelegten Verformungseigenschaften (Trägheit und Steifigkeit) ▪ Knotenpunkte (Verknüpfung finiter Elemente, Angriffspunkte für Einzelkräfte, Beschreibung der Verformung) ▪ starre, reibungsfreie Bindungselemente		
Symbole	**Körper**		
	Zug-/Druckstab		Materialkennwert E Querschnitt A Länge L Dichte ρ
	Balkenelement (Zug/Druck, Biegung, Torsion)		Materialkennwerte E, G Querschnitt A Flächenträgheitsmomente Länge L Dichte ρ
	ebenes Dreieckselement		Materialkennwerte E, ν Dicke h Dichte ρ
	räumliches Tetraederelement		Materialkennwerte E, ν Dichte ρ
	⋮		
	Bindungselemente		
	Gelenklager		
	feste Einspannung		
Anwendung	Karosserieschwingungen, Akustik, Baudynamik, …		
Sonderfall	Elastische Stabfachwerke		

Kontinuierliche Systeme (KOS)

Idealisierungen	▪ Körper mit stetiger Massenverteilung und stetigen Verformungseigenschaften ▪ stetig verteilte Kräfte (Volumenkräfte, Spannungen) ▪ Bindungen (geometrische Randbedingungen)		
Symbole	**Körper** **Bindungen**		Materialkennwerte E, ν Dichte ρ
Anwendung	beschränkt auf Einzelfälle		
Sonderfälle	Balken, Platten, Schalen		

Hybride Mehrkörpersysteme (Elastische Mehrkörpersysteme)

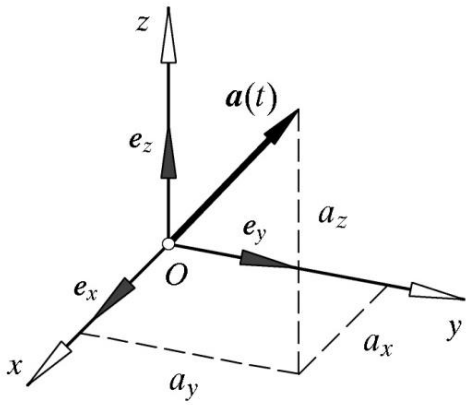
Idealisierungen	starre und elastische Körper
Kombination	▪ MKS + KOS ▪ MKS + FES
Anwendung	Weltraumstrukturen, Robotik, …

Koordinatentransformation

Koordinatendarstellung eines Vektors

Vektor $\mathbf{a}(\mathrm{t})$

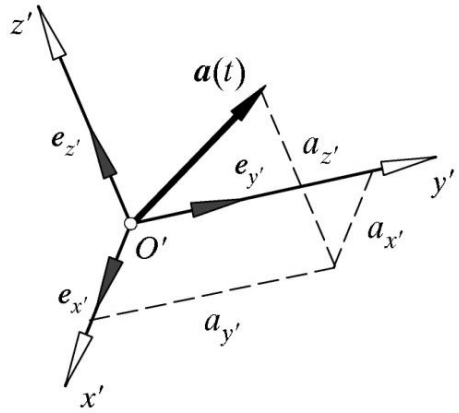
Koordinatensystem $\mathrm{K}\,\{0, \mathbf{e}_\mathrm{x}, \mathbf{e}_\mathrm{y}, \mathbf{e}_\mathrm{z}\}$



$$\mathbf{a} = \mathrm{a_x}\mathbf{e}_\mathrm{x} + \mathrm{a_y}\mathbf{e}_\mathrm{y} + \mathrm{a_z}\mathbf{e}_\mathrm{z}$$

$$\mathbf{a}_\mathrm{K} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_x} \\ \mathrm{a_y} \\ \mathrm{a_z} \end{bmatrix}$$

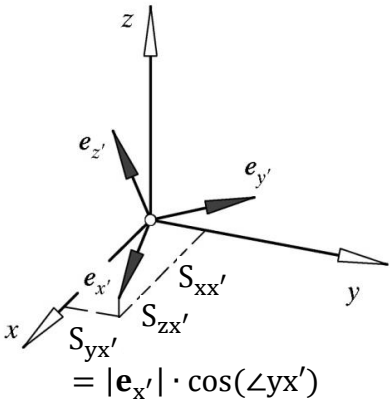
Koordinatensystem $\mathrm{K}'\,\{0', \mathbf{e}_{\mathrm{x}'}, \mathbf{e}_{\mathrm{y}'}, \mathbf{e}_{\mathrm{z}'}\}$



$$\mathbf{a} = \mathrm{a_{x'}}\,\mathbf{e}_{\mathrm{x}'} + \mathrm{a_{y'}}\,\mathbf{e}_{\mathrm{y}'} + \mathrm{a_{z'}}\,\mathbf{e}_{\mathrm{z}'}$$

$$\mathbf{a}_{\mathrm{K}'} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_{x'}} \\ \mathrm{a_{y'}} \\ \mathrm{a_{z'}} \end{bmatrix}$$

Koordinatentransformation



$$\mathbf{e}_{\mathrm{x}'} = \mathrm{S_{xx'}}\mathbf{e}_\mathrm{x} + \mathrm{S_{yx'}}\mathbf{e}_\mathrm{y} + \mathrm{S_{zx'}}\mathbf{e}_\mathrm{z} \qquad \mathbf{e}_{\mathrm{x}'\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} \mathrm{S_{xx'}} \\ \mathrm{S_{yx'}} \\ \mathrm{S_{zx'}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\angle \mathrm{xx'}) \\ \cos(\angle \mathrm{yx'}) \\ \cos(\angle \mathrm{zx'}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{\mathrm{y}'} = \mathrm{S_{xy'}}\mathbf{e}_\mathrm{x} + \mathrm{S_{yy'}}\mathbf{e}_\mathrm{y} + \mathrm{S_{zy'}}\mathbf{e}_\mathrm{z} \qquad \mathbf{e}_{\mathrm{y}'\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} \mathrm{S_{xy'}} \\ \mathrm{S_{yy'}} \\ \mathrm{S_{zy'}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\angle \mathrm{xy'}) \\ \cos(\angle \mathrm{yy'}) \\ \cos(\angle \mathrm{zy'}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{\mathrm{z}'} = \mathrm{S_{xz'}}\mathbf{e}_\mathrm{x} + \mathrm{S_{yz'}}\mathbf{e}_\mathrm{y} + \mathrm{S_{zz'}}\mathbf{e}_\mathrm{z} \qquad \mathbf{e}_{\mathrm{y}'\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} \mathrm{S_{xz'}} \\ \mathrm{S_{yz'}} \\ \mathrm{S_{zz'}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\angle \mathrm{xz'}) \\ \cos(\angle \mathrm{yz'}) \\ \cos(\angle \mathrm{zz'}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = a_{x'}\,\mathbf{e}_{x'} + a_{y'}\,\mathbf{e}_{y'} + a_{z'}\,\mathbf{e}_{z'}$$

Darstellung in K

$$\mathbf{a}_K = a_{x'}\,\mathbf{e}_{x'K} + a_{y'}\,\mathbf{e}_{y'K} + a_{z'}\,\mathbf{e}_{z'K}$$

$$= a_{x'}\begin{bmatrix} S_{xx'} \\ S_{yx'} \\ S_{zx'} \end{bmatrix} + a_{y'}\begin{bmatrix} S_{xy'} \\ S_{yy'} \\ S_{zy'} \end{bmatrix} + a_{z'}\begin{bmatrix} S_{xz'} \\ S_{yz'} \\ S_{zz'} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_K} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{xx'} & S_{xy'} & S_{xz'} \\ S_{yx'} & S_{yy'} & S_{yz'} \\ S_{zx'} & S_{zy'} & S_{zz'} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_{KK'}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \\ a_{z'} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{K'}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \\ a_{z'} \end{bmatrix}$$

Transformationsmatrix $K' \rightarrow K$ (Drehmatrix)

Eigenschaften einer Drehmatrix: $\mathbf{S}_{KK'} = [\mathbf{e}_{x'K} \quad \mathbf{e}_{y'K} \quad \mathbf{e}_{z'K}]$

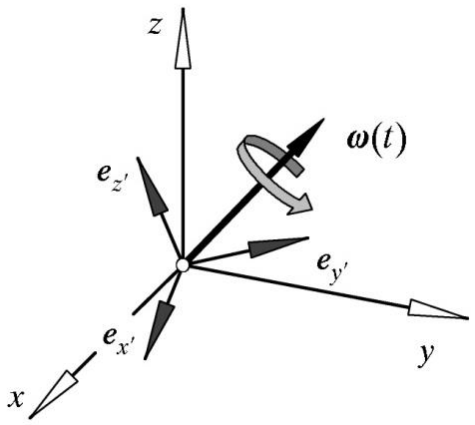
Es gilt: $\|\mathbf{e}_{x'}\| = \|\mathbf{e}_{y'}\| = \|\mathbf{e}_{z'}\| = 1$, $\quad \mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{e}_{y'} = \mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{e}_{z'} = \mathbf{e}_{y'} \cdot \mathbf{e}_{z'} = 0$

Daraus folgt:

$$\mathbf{S}_{KK'}^T \cdot \mathbf{S}_{KK'} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x'K} \\ \mathbf{e}_{y'K} \\ \mathbf{e}_{z'K} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{e}_{x'K} \quad \mathbf{e}_{y'K} \quad \mathbf{e}_{z'K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{e}_{x'} & \mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{e}_{y'} & \mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{e}_{z'} \\ \mathbf{e}_{y'} \cdot \mathbf{e}_{x'} & \mathbf{e}_{y'} \cdot \mathbf{e}_{y'} & \mathbf{e}_{y'} \cdot \mathbf{e}_{z'} \\ \mathbf{e}_{z'} \cdot \mathbf{e}_{x'} & \mathbf{e}_{z'} \cdot \mathbf{e}_{y'} & \mathbf{e}_{z'} \cdot \mathbf{e}_{z'} \end{bmatrix}_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \mathbf{S}_{KK'}^T \cdot \mathbf{S}_{KK'} = \mathbf{S}_{KK'} \cdot \mathbf{S}_{KK'}^T = \mathbf{E}$$

Drehmatrix ist orthogonal



◇ $\mathbf{S}_{KK'}^{-1} = \mathbf{S}_{KK'}^T$

◇ $\det \mathbf{S}_{KK'} = 1$

◇ $\dot{\mathbf{S}}_{KK'} \cdot \mathbf{S}_{KK'}^T = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_K = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \boldsymbol{\omega}_K = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$ Winkelgeschwindigkeitsvektor dargestellt in K

Rücktransformation: $\mathbf{a}_{K'} = \mathbf{S}_{KK'}^T \cdot \mathbf{a}_K$ mit $\mathbf{S}_{K'K} = \mathbf{S}_{KK'}^T$

Beschreibungsformen der Rotation

Beschreibung	Bindungsgleichungen	verallgemeinerte Koordinaten $x \in \mathbb{R}^3$	Zusammenhang zur Drehmatrix
9 Richtungskosinusse $\mathbf{S}(t)$	6 Bindungen $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{E}$	z.B. $S_{11}(t)$, $S_{12}(t)$, $S_{23}(t)$	
4 Drehparameter $\mathbf{d}(t)$ $\varphi(t)$	1 Bindung $\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1$	z.B. $d_1(t)$, $d_2(t)$, $\varphi(t)$	$\mathbf{S} = \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{d}} \sin\varphi + \tilde{\mathbf{d}} \cdot \tilde{\mathbf{d}} (1 - \cos\varphi)$
4 Euler-Parameter $q_0(t)$ $\mathbf{q}(t)$	1 Bindung $q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 1$	z.B. $q_0(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$	$\mathbf{S} = \mathbf{E} + 2q_0\tilde{\mathbf{q}} + 2\tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}$
3 Rodrigues−Parameter $\mathbf{p}(t)$		$p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$	$\mathbf{S} = \mathbf{E} + 2\dfrac{\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}}{1 + \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{p}}$
3 Elementardrehungen Kardan−Winkel $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ Euler−Winkel $\psi(t)$, $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$		 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ $\psi(t)$, $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$	 $\mathbf{S} = \boldsymbol{\alpha}_1(t) \cdot \boldsymbol{\beta}_2(t) \cdot \boldsymbol{\gamma}_3(t)$ $\mathbf{S} = \boldsymbol{\psi}_3(t) \cdot \boldsymbol{\vartheta}_1(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}_3(t)$

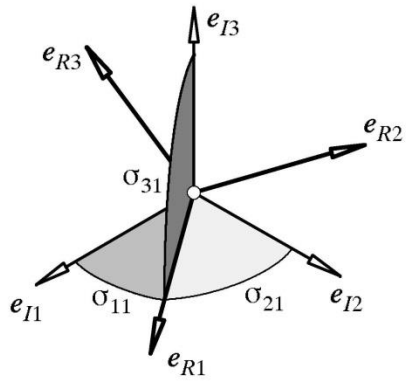
Für jede Beschreibungsform lässt sich eine Darstellung der Drehmatrix in Abhängigkeit eines Lagevektors $\mathbf{x}(t) = [x_1\ x_2\ x_3]$ finden:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}\big(\mathbf{x}(t)\big) = \mathbf{S}(\mathbf{x})$$

Richtungskosinusse S_{ij}

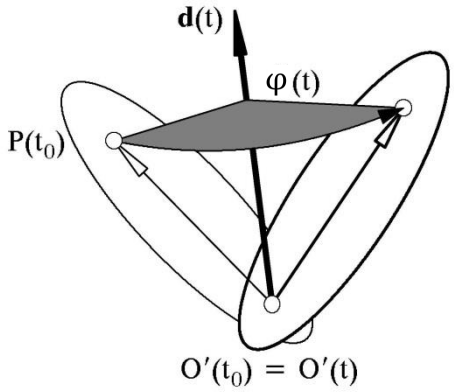
$$S_{ij} = \cos\sigma_{ij} = \cos(\mathbf{e}_{Ii}, \mathbf{e}_{Rj})$$

$$\rightarrow \mathbf{S} = [\ \mathbf{e}_{R1}|_I\ \ \mathbf{e}_{R2}|_I\ \ \mathbf{e}_{R3}|_I\ ]$$



Drehparameter $\mathbf{d}(t)$ $\varphi(t)$

Jede räumliche Drehung lässt sich als Einzeldrehung um eine Drehachse $\mathbf{d}(t)$, $\|\mathbf{d}(t)\| = 1$, mit dem Winkel $\varphi(t)$ beschreiben



Euler-Parameter $\mathbf{q}(t)$ $q_0(t)$

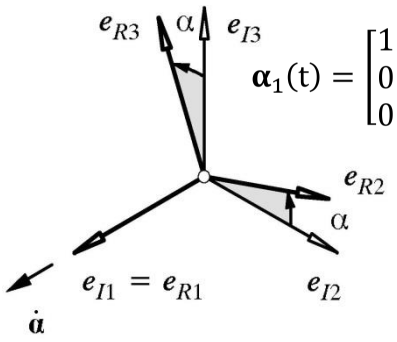
eng verwandt mit den Drehparametern: $\mathbf{q} = \mathbf{d}\sin\frac{\varphi}{2}, q_0 = \cos\frac{\varphi}{2}$

Rodrigues−Parameter $\mathbf{p}(t)$

Normierung der Euler-Parameter: $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{q}}{q_0} = \mathbf{d}\tan\frac{\varphi}{2}$

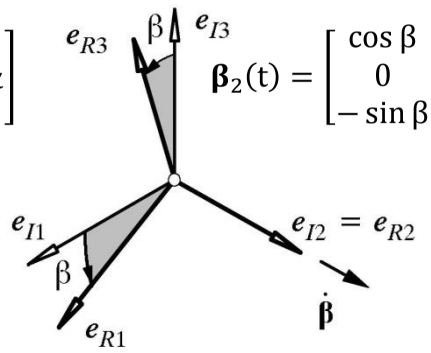
Elementardrehungen um einzelne Koordinatenachsen

Achse $\mathbf{e}_1$, Winkel $\alpha(t)$



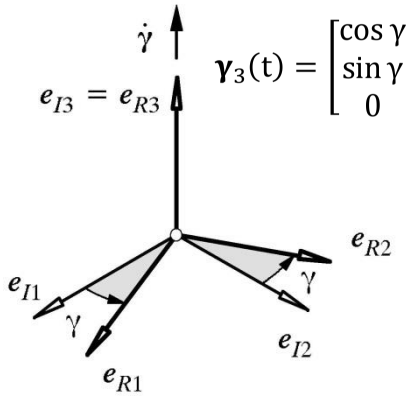
$$\boldsymbol{\alpha}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Achse $\mathbf{e}_2$, Winkel $\beta(t)$



$$\boldsymbol{\beta}_2(t) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Achse $\mathbf{e}_3$, Winkel $\gamma(t)$



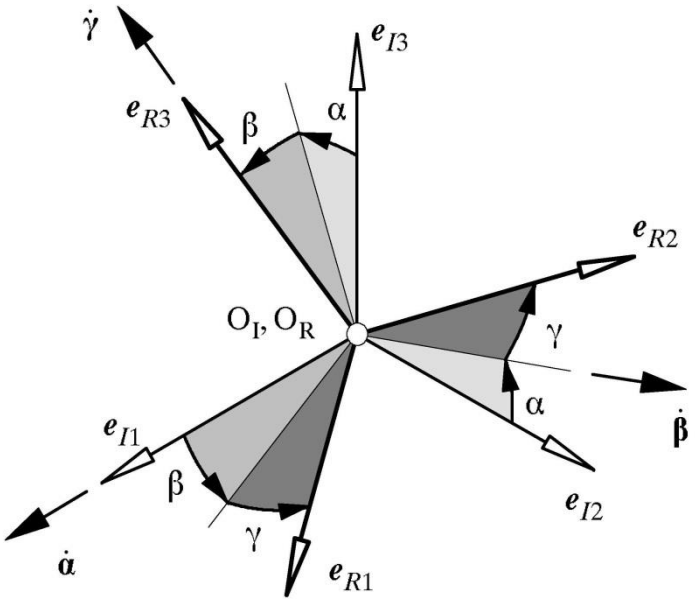
$$\boldsymbol{\gamma}_3(t) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Euler− und Kardan−Winkel

Führt ein Körper nur Rotationen um einen festen Punkt aus, so genügen zur eindeutigen Lagebeschreibung des Körpers drei voneinander unabhängige Winkel. Fallen beispielsweise das Inertialsystem $\{\mathrm{O_I}, \mathbf{e}_{\mathrm{I1}}, \mathbf{e}_{\mathrm{I2}}, \mathbf{e}_{\mathrm{I3}}\}$ und das körperfeste Koordinatensystem $\{\mathrm{O_R}, \mathbf{e}_{\mathrm{R1}}, \mathbf{e}_{\mathrm{R2}}, \mathbf{e}_{\mathrm{R3}}\}$ zunächst zusammen, so kann eine allgemeine Drehung als Hintereinanderschaltung von elementaren Drehungen um Achsen des körperfesten Systems aufgefasst werden. Die endliche Drehung wird dabei durch eine Drehmatrix gekennzeichnet. Den Vektor der Winkelgeschwindigkeit erhält man entweder durch Differenzieren der Drehmatrix oder durch Addieren der Winkelgeschwindigkeitskomponenten der elementaren Drehungen, wobei aber die entsprechenden Koordinatentransformationen zu beachten sind.

Kardan−Winkel

Dreht man der Reihe nach um die momentanen Achsen $\mathbf{e}_{\mathrm{R1}}$, $\mathbf{e}_{\mathrm{R2}}$, $\mathbf{e}_{\mathrm{R3}}$, so heißen die zugehörigen Drehwinkel KARDAN−WINKEL und werden mit α, β, γ bezeichnet. Zu beachten ist, dass die Elementardrehungen nacheinander um die Achsen desjenigen Systems erfolgen, das durch die vorhergegangenen Drehungen entstanden ist.



Die zugehörige Drehmatrix hat die Form

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

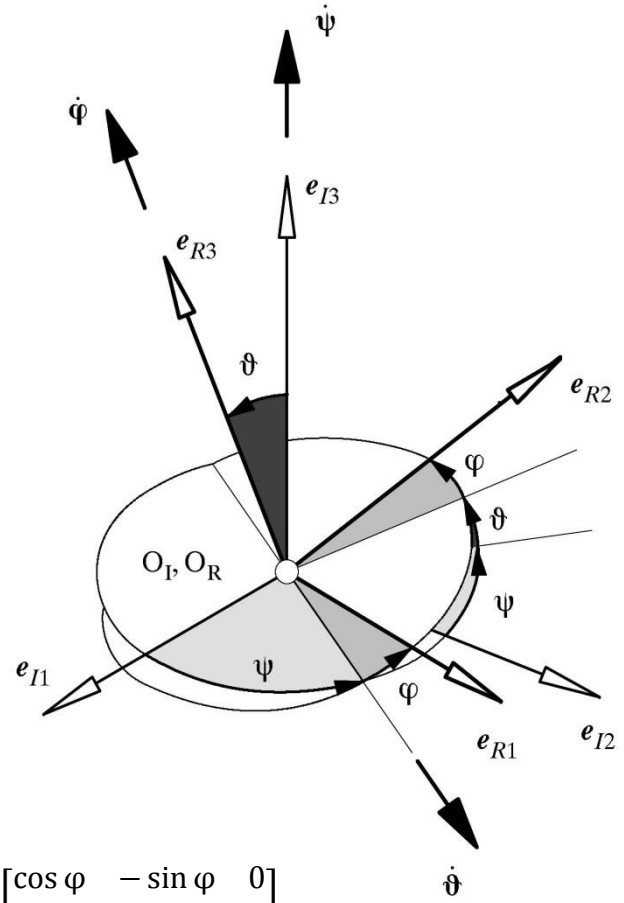
Im Inertialsystem $\{\mathrm{O_I}, \mathbf{e}_{\mathrm{I1}}, \mathbf{e}_{\mathrm{I2}}, \mathbf{e}_{\mathrm{I3}}\}$ lautet der Winkelgeschwindigkeitsvektor

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}.$$

Euler−Winkel

Führt man dagegen die Elementardrehungen so aus, dass sie nacheinander um die momentanen Achsen $\mathbf{e}_{\mathrm{R3}}$, $\mathbf{e}_{\mathrm{R1}}$, $\mathbf{e}_{\mathrm{R3}}$ erfolgen, so heißen die Drehwinkel EULER−WINKEL und werden mit ψ, ϑ, φ bezeichnet.



Die entsprechende Drehmatrix lautet

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \sin\psi\sin\vartheta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

und der Winkelgeschwindigkeitsvektor hat im Inertialsystem $\{\mathrm{O_I}, \mathbf{e}_{\mathrm{I1}}, \mathbf{e}_{\mathrm{I2}}, \mathbf{e}_{\mathrm{I3}}\}$ die Form

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cos\psi & \sin\psi\sin\vartheta \\ 0 & \sin\psi & -\cos\psi\sin\vartheta \\ 1 & 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Die EULER−WINKEL benützt man hauptsächlich in der Kreiseltheorie, während für technische Probleme und in der Luftfahrt meist KARDAN−WINKEL verwendet werden. Manchmal ist auch ein Wechsel der Beschreibungsart notwendig, um Singularitäten zu vermeiden und die Eindeutigkeit der Beschreibung zu gewährleisten.

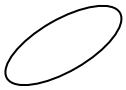
Klassifizierung von Bindungen

Kriterium	**Bindung**	
kinematische Größen	**geometrisch**	Beziehung zwischen Lagegrößen $\rightarrow$ reduziert Freiheitsgrad der Lage und der Geschwindigkeit (Gelenke, Lager)
	kinematisch	Beziehung zwischen Geschwindigkeitsgrößen $\rightarrow$ reduziert Freiheitsgrad der Geschwindigkeit
	integrierbar	überführbar in geometrische Bindung $\rightarrow$ reduziert gleichzeitig Freiheitsgrad der Lage
	nicht integrierbar	nicht überführbar in geometrische Bindung $\rightarrow$ reduziert **nur** Freiheitsgrad der Geschwindigkeit (Wälzpaarungen, Schneiden)
Bewegungs-beschränkung	**holonom**	geometrische oder integrierbare kinematische Bindung $\rightarrow$ reduziert Freiheitsgrad der Lage und Geschwindigkeit
	nichtholonom	nicht integrierbare kinematische Bindung $\rightarrow$ reduziert **nur** Freiheitsgrad der Geschwindigkeit
Funktionstyp	**implizit**	$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ geometrisch $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ kinematisch
	explizit	$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$ geometrisch $\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ kinematisch
Zeitabhängig-keit	**skleronom**	$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$ nicht explizit zeitabhängig
	rheonom	$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$ explizit zeitabhängig
Wirkung	**zweiseitig**	Wirkung in beide Richtungen (Gleichungsbedingung)
	einseitig	Wirkung nur in eine Richtung (Ungleichungsbedingung)

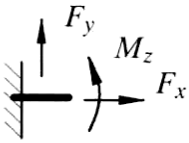
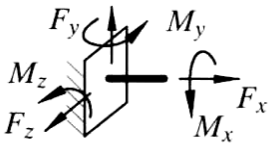
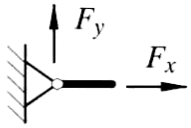
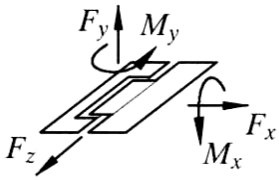
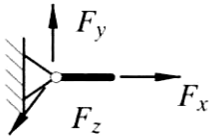
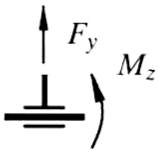
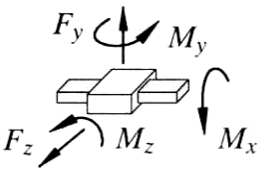
Charakterisierung von Lagerungen

(holonome Mehrkörpersysteme)

- $f^u = \sum f_i^u$ Freiheitsgrad des freigeschnittenen Mehrkörpersystems
  = Zahl der unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten der freien Körper
  = Gesamtzahl der verfügbaren Gleichungen

Körpertyp	**Freiheitsgrad**	
	eben	**räumlich**
Massenpunkt	$f_i^u = 2$	$f_i^u = 3$
starrer Körper	 $f_i^u = 3$	$f_i^u = 6$

- $n^c = \sum n_j^c$ Summe aller Lagerwertigkeiten
  = Zahl der holonomen Bindungen
  = Zahl der Bewegungsbeschränkungen
  = Zahl der hervorgerufenen Lagerreaktionen

Lagertyp	**Lagerwertigkeit**	
	eben	**räumlich**
feste Einspannung	 $n_j^c = 3$	 $n_j^c = 6$
Scharnier (Drehgelenk)	 $n_j^c = 2$	 $n_j^c = 5$
Kugelgelenk		 $n_j^c = 3$
Schubgelenk	 $n_j^c = 2$	 $n_j^c = 5$
⋮		

- $n = \mathrm{Rg}\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}}$ Zahl der unabhängigen Lagerwertigkeiten mit $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varphi}$: $\mathbb{R}^{f^u} \to \mathbb{R}^{n^c}$
  = Zahl der berechenbaren Lagerreaktionen

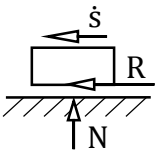
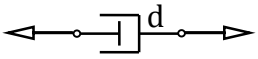
➧ $f = f^u - n$ Freiheitsgrad des holonomen Mehrkörpersystems
  $f = 0$ kinematisch bestimmt
  $f > 0$ kinematisch unbestimmt

➧ $r = n^c - n$ überzählige Lagerreaktionen
  $r = 0$ statisch bestimmt
  $r > 0$ statisch unbestimmt

Hinweis für die Praxis (n oft schwierig zu bestimmen):

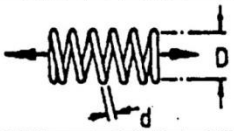
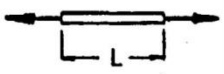
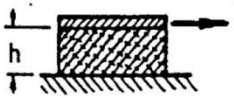
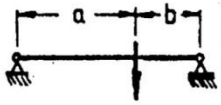
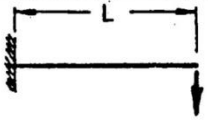
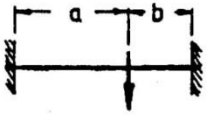
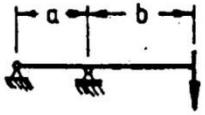
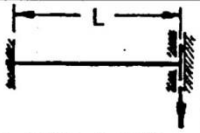
1) f aus Anschauung $\Rightarrow n = f^u - f,\ r = n^c - n$
2) r aus Anschauung $\Rightarrow n = n^c - r,\ f = f^u - n$

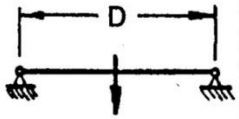
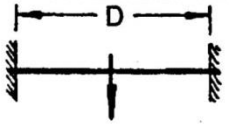
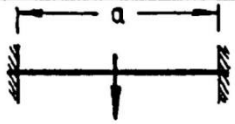
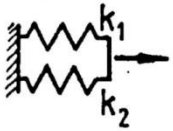
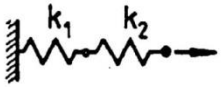
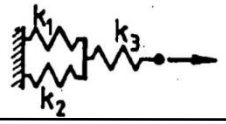
Kräftearten

Unterscheidungs-merkmal	**Typ**
Systemgrenze $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^a + \mathbf{f}_i^i$	**innere Kräfte:** treten innerhalb der Systemgrenze paarweise auf z.B. Koppelglieder und Bindungen innerhalb des Systems **äußere Kräfte:** Ursache außerhalb der Systemgrenze, treten einfach auf z.B. Gewichtskräfte, Kopplungen und Bindungen an Umwelt
Ersetzbarkeit $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^e + \mathbf{f}_i^r$	**Reaktionskräfte:** Unbekannte des Systems, Reaktion auf Bewegungsbeschränkung durch Bindungen n holonome Bindungen $\rightarrow$ n verallg. Reaktionskräfte $\mathbf{g} = [g_1 \dots g_n]$ $\mathbf{f}_i^r = \mathbf{F}_i(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{g}, \quad i = 1(1)p$ **eingeprägte Kräfte:** gehorchen einem Kraftgesetz **nichtideale Kräfte:** abhängig von Reaktionskräften $\mathbf{f}_i^e = \mathbf{f}_i^e(\mathbf{y}, \mathbf{g}, t)$ z.B. Gleitreibung $R(N) = -\mu N \frac{\dot{s}}{\lvert\dot{s}\rvert}$  **ideale Kräfte:** unabhängig von Reaktionskräften **P−Kräfte:** lageabhängig $\mathbf{f}_i^e = \mathbf{f}_i^e(\mathbf{y}, t)$ z.B. Gewichtskraft $F = mg$ z.B. Federkraft $F = c(s - s_0)$ **PD−Kräfte:** zus. geschwindigkeitsabhängig $\mathbf{f}_i^e = \mathbf{f}_i^e(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$ z.B. Dämpferkraft $F = d\,\dot{s}$  **PID−Kräfte:** zus. abhängig von Lageintegralen $\mathbf{w}$ $\mathbf{f}_i^e = \mathbf{f}_i^e(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{w}, t)$ $\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{w}, t)$

Federkonstanten

In **H. Irretier, Grundlagen der Schwingungstechnik I, Braunschweig: Vieweg 2000, S.53/54** sind Federkonstanten für verschiedene Elemente mit linearem Federgesetz, d.h. mit $F_F = k\,w$, angegeben.

	System		Federkonstante k	
Zug- u. Druckfedern	Schraubenfeder		$\frac{Gd^4}{8nD^3}$	G Schubmodul n Windungszahl
	Stab		$\frac{EA}{L}$	E Elastizitätsm. A Querschnittsfl.
Schub-feder	Gummifeder		$\frac{GA}{h}$ (frequenzabhängig)	G Schubmodul A Querschnittsfl.
Biegefedern (Balken)	Balken gestützt/gestützt		$\frac{3EI(a+b)}{a^2b^2}$	E Elastizitätsm. I Flächenträgheitsmoment
	Balken eingespannt/frei		$\frac{3EI}{L^3}$	
	Balken eingespannt/eingespannt		$\frac{3EI(a+b)^3}{a^3b^3}$	
	Balken gestützt/gestützt überkragend		$\frac{3EI}{(a+b)b^2}$	
	Balken eingespannt/geführt		$\frac{12EI}{L^3}$	

	System		Federkonstante k	
Biegefedern (Platten)	Kreisplatte Rand gestützt		$\frac{1+\nu}{3+\nu}\,\frac{64\pi B}{D^2}$	$B=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ E Elastizitätsm ν Querzahl h Plattendicke
	Kreisplatte Rand eingespannt		$\frac{64\pi B}{D^2}$	
	Quadratplatte allseitig gestützt		$\frac{86{,}21B}{a^2}$	
	Quadratplatte allseitig eingespannt		$\frac{178{,}6B}{a^2}$	
Saite	biegeschlaffe, vorgespannte Saite		$S\,\frac{a+b}{ab}$	S Vorspannkraft
Federkombinationen	parallelgeschaltete Federn		k_1+k_2	
	reihengeschaltete Federn		$\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$	
	parallel- und reihengeschaltete Federn		$\frac{(k_1+k_2)k_3}{k_1+k_2+k_3}$	

Trägheitsmomente

Trägheitstensor

im körperfesten System

$$\mathbf{I}' = -\int_K \tilde{\mathbf{r}}' \cdot \tilde{\mathbf{r}}' \, dm = \begin{bmatrix} I'_{xx} & I'_{xy} & I'_{xz} \\ I'_{xy} & I'_{yy} & I'_{yz} \\ I'_{xz} & I'_{yz} & I'_{zz} \end{bmatrix} = \mathbf{I}'^{T}$$

im Inertialsystem (Koordinatentransformation)

$$\mathbf{I} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{I}' \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{I}^T$$

Direkte Berechnung

Massenträgheitsmomente

$$I'_{xx} = \int_K (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I'_{yy} = \int_K (z^2 + x^2)\, dm$$
$$I'_{zz} = \int_K (x^2 + y^2)\, dm$$

Massendeviationsmomente

$$I'_{xy} = -\int_K xy\, dm$$
$$I'_{yz} = -\int_K yz\, dm$$
$$I'_{xz} = -\int_K xz\, dm$$

Dreiecksungleichungen

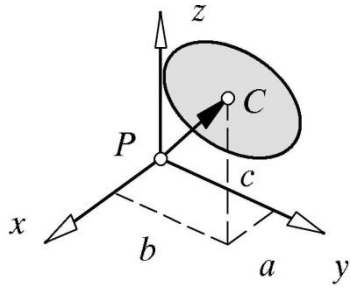
$$I'_{xx} + I'_{yy} \geq I'_{zz}$$
$$I'_{yy} + I'_{zz} \geq I'_{xx}$$
$$I'_{zz} + I'_{xx} \geq I'_{yy}$$

speziell: Im Hauptachsensystem verschwinden die Deviationsmomente (Achsen senkrecht zu Symmetrieebenen sind Hauptachsen)

$$I^H = \begin{bmatrix} I^H_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I^H_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I^H_{zz} \end{bmatrix}$$

Vereinfachte Berechnung für zusammengesetzte Körper

$$K = \cup_i K_i \quad : \quad \mathbf{I}' = \sum_i \mathbf{I}'_i$$



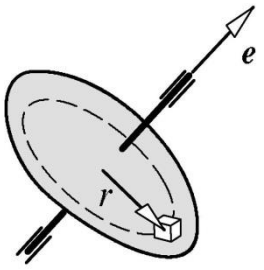
Huygens−Steiner Gleichungen

(Wechsel des Bezugspunktes, Schwerpunkt C)

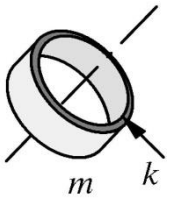
$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_C + m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & c^2 + a^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

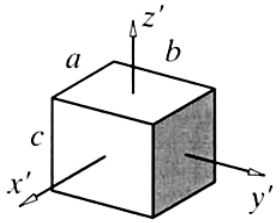
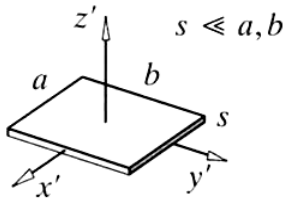
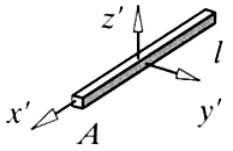
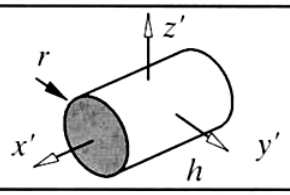
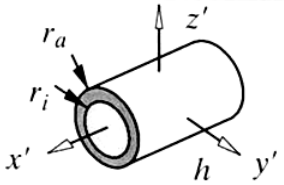
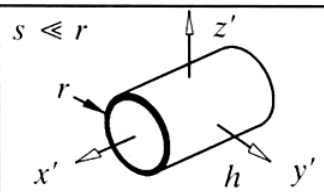
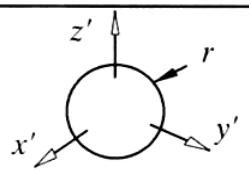
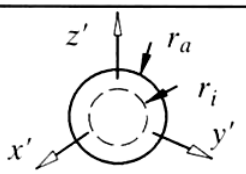
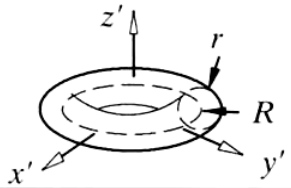
Trägheitsmoment bezüglich einer Achse $\mathbf{e}$ $(\|\mathbf{e}\| = 1)$

$$I_e = \int_K r^2\, dm = \mathbf{e} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}$$



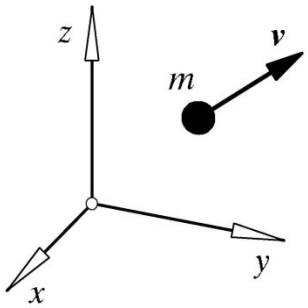
Trägheitsradius k: $I_e \overset{!}{=} k^2 m \Rightarrow \; k = \sqrt{\frac{I_e}{m}}$



Körper	Geometrie	Masse	Trägheitsmomente
Quader		$m = \rho abc$	$I'_{xx} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$ $I'_{yy} = \frac{m}{12}(c^2 + a^2)$ $I'_{zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$
Platte		$m = \rho abs$	$I'_{xx} = \frac{m}{12} b^2$ $I'_{yy} = \frac{m}{12} a^2$ $I'_{zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$
dünner Stab		$m = \rho Al$	$I'_{xx} = 0$ $I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{ml^2}{12}$
Kreis-zylinder		$m = \rho\pi r^2 h$	$I'_{xx} = \frac{1}{2} mr^2$ $I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{m}{12}(3r^2 + h^2)$
Hohl-zylinder		$m = \rho\pi(r_a^2 - r_i^2)h$	$I'_{xx} = \frac{m}{2}(r_a^2 + r_i^2)$ $I'_{zz} = I'_{yy} = \frac{m}{4}(r_a^2 + r_i^2 + h^2/3)$
Zylinder-schale		$m = \rho 2\pi rsh$	$I'_{xx} = mr^2$ $I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{m}{12}(6r^2 + h^2)$
Kugel		$m = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$	$I'_{xx} = I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{2}{5} mr^2$
Hohl-kugel		$m = \rho\frac{4}{3}\pi(r_a^3 - r_i^3)$	$I'_{xx} = I'_{yy} = I'_{zz} = \frac{2}{5} m \frac{r_a^5 - r_i^5}{r_a^3 - r_i^3}$
Kreis-torus		$m = \rho 2\pi^2 r^2 R$	$I'_{xx} = I'_{yy} = \frac{m}{8}(4R^2 + 5r^2)$ $I'_{zz} = \frac{m}{4}(4R^2 + 3r^2)$

Kinetische Energie

Massenpunkt



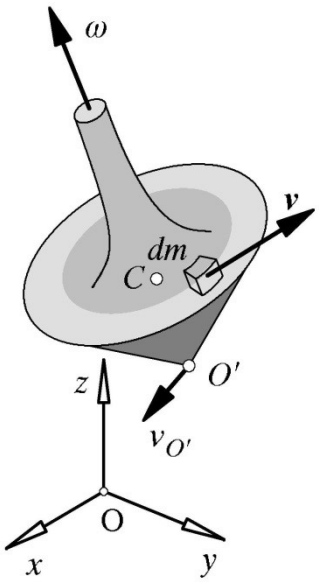
Definition: $\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{m}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{p}$

Einheit: $1[\mathrm{Nm}] = 1\ [\,\mathrm{J}\,]$

Starrkörper

Massenelement: $\mathrm{dT} = \frac{1}{2}\mathrm{dm}\ \mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{dm}\ \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{v}$

Starrkörperkinematik



Körper: $\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\ \mathbf{v}_{\mathrm{O}'}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{O}'} - \mathrm{m}\ \mathbf{v}_{\mathrm{O}'}^{\mathrm{T}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{C}}' \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{I}_{\mathrm{O}'} \cdot \boldsymbol{\omega}$

Sonderfälle:
- ♦ $\mathrm{O}' \equiv \mathrm{C}$ Schwerpunkt $\Rightarrow \mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\ \mathbf{v}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{C}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{I}_{\mathrm{C}} \cdot \boldsymbol{\omega}$
- ♦ $\mathrm{O}' \equiv \mathrm{C}$, ebene Bewegung $\Rightarrow \mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\mathrm{v}_{\mathrm{Cx}}^2 + \mathrm{v}_{\mathrm{Cy}}^2\right) + \frac{1}{2}\mathrm{I}_{\mathrm{Cz}}\omega^2$
- ♦ O' Fixpunkt oder Momentanpol $\Rightarrow \mathrm{T} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{I}_{\mathrm{O}'} \cdot \boldsymbol{\omega}$

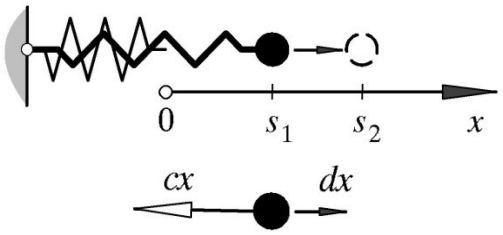
Mehrkörpersystem

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\int_{\cup \mathrm{K_i}} \mathrm{v}^2\ \mathrm{dm} = \sum_{\mathrm{i}} \frac{1}{2}\int_{\mathrm{K_i}} \mathrm{v}^2\ \mathrm{dm} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{T_i}$$

kinetische Energie des einzelnen Massenpunkts oder Körpers

Potentielle Energie

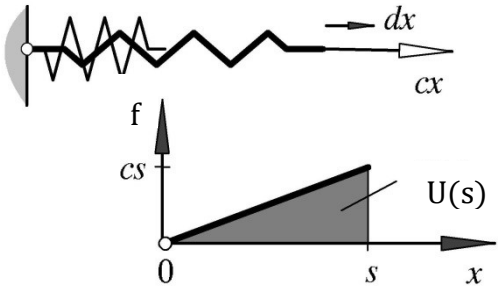
◇ lineare Feder



am Körper geleistete Arbeit:

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} (-cx)dx = -\left(\frac{c\,s_2^2}{2} - \frac{c\,s_1^2}{2}\right)$$

an Feder geleistete Arbeit und damit in Feder gespeicherte Energie:

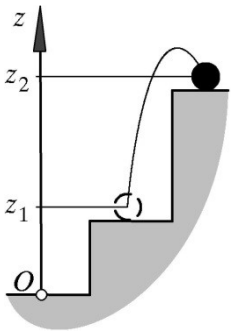


$$U(s) = \int_0^s cx\,dx = \frac{c\,s^2}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$W_{12} = -\Delta U = -[U(s_2) - U(s_1)]$$

◇ konstante Gewichtskraft

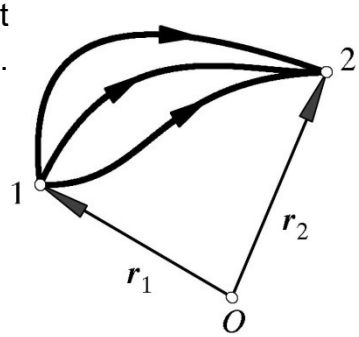


$$W_{12} = \int_1^2 [0 \quad 0 \quad -mg] \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$= -[mg\,z_2 - mg\,z_1] \;\Rightarrow U(z) = mgz$$

◇ allgemeine Definition

Eine Kraft $\mathbf{f}$ ist eine Potentialkraft, wenn die geleistete Arbeit nicht vom Weg, sondern nur von den Endpunkten abhängt. Es existiert dann eine Potentialfunktion $U(\mathbf{r})$, so dass gilt:



$$W_{12} = -\Delta U = -[U(\mathbf{r_2}) - U(\mathbf{r_1})]$$

Bestimmung von $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$:

$$dU = -dW = -\mathbf{f}^T \cdot d\mathbf{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = -f_x\,dx - f_y\,dy - f_z\,dz$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x} = -f_x\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -f_y\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = -f_z}$$

$$\operatorname{grad} U = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} = -\mathbf{f}$$

Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art

Prinzip von d'Alembert: $$\sum_k \left(m_k \mathbf{a}_k^T - \mathbf{f}_k^{eT}\right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_k \left[\left(m_k \dot{\mathbf{v}}_k^T \cdot \dot{\mathbf{v}}_k - \mathbf{f}_k^{eT}\right) \cdot \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial y_i} \delta y_i\right] = \sum_{i=1}^{f} \left[\sum_k m_k \dot{\mathbf{v}}_k^T \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial y_i} - \sum_k \mathbf{f}_k^{eT} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial y_i}\right] \delta y_i = 0$$

- $$\mathbf{v}_k = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial y_i} \dot{y}_i \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial y_i}$$
- $$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\mathbf{v}_k^T \cdot \mathbf{v}_k\right) = \frac{\partial \mathbf{v}_k^T}{\partial y_i} \cdot \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_k^T \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial y_i} = 2\, \mathbf{v}_k^T \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial y_i}$$
- $$\begin{aligned} m_k \dot{\mathbf{v}}_k^T \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial y_i} &= \frac{d}{dt}\left[m_k \mathbf{v}_k^T \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial y_i}\right] - m_k \mathbf{v}_k^T \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial y_i}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left[m_k \mathbf{v}_k^T \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \dot{y}_i}\right] - m_k \mathbf{v}_k^T \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{d\mathbf{r}_k}{dt}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{y}_i}\left(\frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^T \cdot \mathbf{v}_k\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^T \cdot \mathbf{v}_k\right) \\ &= \frac{d}{dt}\frac{\partial T_k}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial T_k}{\partial y_i} \end{aligned}$$
- $$T = \sum_k T_k = \sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^T \cdot \mathbf{v}_k = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2$$ kinetische Energie
- $$Q_i = \sum_k \mathbf{f}_k^{eT} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial y_i}$$ verallgemeinerte Kraft zum Freiheitsgrad y_i

$$\sum_{i=1}^{f} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial T}{\partial y_i} - Q_i\right] \delta y_i = 0$$

$$\Downarrow$$

Lagrange Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial T}{\partial y_i} = Q_i\,, \quad i = 1(1)f$$

speziell: konservative Systeme

eingeprägte Kräfte haben ein Potential $U_k(\mathbf{r}_k)$ mit $\mathbf{f}_k^e = -\text{grad}\, U_k = -\dfrac{\partial U_k}{\partial \mathbf{r}_k}$

$$\Downarrow \quad Q_i = \sum_k \mathbf{f}_k^{eT} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial y_i} = -\sum_k \left(\frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{r}_k}\right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial y_i} = -\sum_k \frac{\partial U_k}{\partial y_i} = -\frac{\partial}{\partial y_i}\sum_k U_k = -\frac{\partial U}{\partial y_i}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial T}{\partial y_i} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial}{\partial y_i}(T - U) = 0$$

$\Downarrow$ $L := T - U$ Lagrange-Funktion

Bewegungsgleichungen
(Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art für konservative Systeme)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0\,, \qquad i = 1(1)f$$

Allgemeines Vorgehen zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen für konservative Mehrkörpersysteme

1) Beschreiben der Kinematik mit verallgemeinerten Koordinaten y_1 ... y_f

2) Kinetische Energie des Gesamtsystems $T = \sum_k T_k$

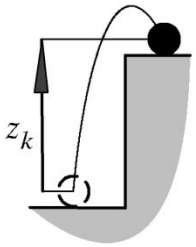
   □ Massenpunkt: $T_k = \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^T \cdot \mathbf{v}_k$

   □ Starrkörper: $T_k = \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_{Ck}^T \cdot \mathbf{v}_{Ck} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_k^T \cdot \mathbf{I}_{Ck} \cdot \boldsymbol{\omega}_k$

3) Potentielle Energie des Gesamtsystems $U = \sum_k U_k$

   □ Feder $U_k = \frac{1}{2} c_k s_k^2$

   □ Gewichtskraft $U_k = m_k\, g\, z_k$



4) Lagrange-Funktion $L = T - U$

5) Differentiation $\dfrac{\partial L}{\partial y_i}, \quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}, \quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right)$

6) **Bewegungsgleichungen** $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial y_i} = 0\,, \qquad i = 1(1)f$

Gleichungen gewöhnlicher Mehrkörpersysteme (MKS)

Newton-Eulersche Gleichungen (DGLn, i.a. nichtlinear, mit Reaktionskräften und -momenten)

$$\boxed{\overbrace{\bar{\bar{\mathbf{M}}}}^{\begin{bmatrix} m_1\mathbf{E} & \mathbf{0} & & & \\ \mathbf{0} & m_2\mathbf{E} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & \dots \end{bmatrix}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{T1} \\ \mathbf{J}_{T2} \\ \dots \\ \mathbf{J}_{R1} \\ \dots \end{bmatrix}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \overbrace{\begin{bmatrix} m_1\bar{\mathbf{a}}_1 \\ m_2\bar{\mathbf{a}}_2 \\ \dots \\ \mathbf{I}_1\cdot\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1\cdot\mathbf{I}_1\cdot\boldsymbol{\omega}_1 \\ \dots \end{bmatrix}} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{f}_2^e \\ \dots \\ \mathbf{l}_1^e \\ \dots \end{bmatrix}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T1} \\ \mathbf{F}_{T2} \\ \dots \\ \mathbf{F}_{R1} \\ \dots \end{bmatrix}} \cdot \mathbf{g}}$$

Projektion zur Elimination der Reaktionskräfte und -momente ⇩

Projektion zur Berechnung der Reaktionskräfte und -momente ⇩

$$\underbrace{\bar{\mathbf{J}}^T\cdot\bar{\bar{\mathbf{M}}}\cdot\bar{\mathbf{J}}}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\bar{\mathbf{J}}^T\cdot\bar{\mathbf{q}}^c} = \underbrace{\bar{\mathbf{J}}^T\cdot\bar{\mathbf{q}}^e} + \underbrace{\bar{\mathbf{J}}^T\cdot\bar{\mathbf{Q}}}_{\mathbf{0}}\cdot\mathbf{g}$$

$$\boxed{\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k} = \mathbf{q}}$$

MKS-**Bewegungsgleichungen**
(DGLn, i.a. nichtlinear)

Ortho-
gonalitäts-
beziehung

Optional und falls physikalisch gerechtfertigt: **Linearisierung** um eine Soll-Bewegung

$$\underbrace{\bar{\mathbf{Q}}^T\cdot\bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1}\cdot\bar{\bar{\mathbf{M}}}\cdot\bar{\mathbf{J}}}_{\mathbf{0}}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\bar{\mathbf{Q}}^T\cdot\bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1}\cdot\bar{\mathbf{q}}^c} = \underbrace{\bar{\mathbf{Q}}^T\cdot\bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1}\cdot\bar{\mathbf{q}}^e} + \underbrace{\bar{\mathbf{Q}}^T\cdot\bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1}\cdot\bar{\mathbf{Q}}}\cdot\mathbf{g}$$

Ortho-
gonalitäts-
beziehung

$$\boxed{\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{g}}$$

Optional: **Reaktionsgleichungen** (LGS)

$$\underbrace{\mathbf{M}(\mathbf{y}_S,t)}\cdot\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\left.\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\right|_S - \left.\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\right|_S\right)}\cdot\dot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\left.\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{y}}\right|_S\cdot\ddot{\mathbf{y}}_S + \left.\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\mathbf{y}}\right|_S - \left.\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{y}}\right|_S\right)}\cdot\boldsymbol{\eta} = \underbrace{\mathbf{q}(\mathbf{y}_S,\dot{\mathbf{y}}_S,t) - \mathbf{k}(\mathbf{y}_S,\dot{\mathbf{y}}_S,t) - \mathbf{M}(\mathbf{y}_S,t)\cdot\ddot{\mathbf{y}}_S}$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{M}}\cdot\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{P}\cdot\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}}$$

linearisierte Bewegungsgleichungen (DGL)

⇩ Optional und falls System zeitinvariant: Aufteilung zur physikalischen Interpretation

$$\boxed{\tilde{\mathbf{M}}\cdot\ddot{\boldsymbol{\eta}} + (\underbrace{\mathbf{D}}_{\frac{1}{2}(\mathbf{P}+\mathbf{P}^T)} + \underbrace{\mathbf{G}}_{\frac{1}{2}(\mathbf{P}-\mathbf{P}^T)})\cdot\dot{\boldsymbol{\eta}} + (\underbrace{\mathbf{K}}_{\frac{1}{2}(\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^T)} + \underbrace{\mathbf{N}}_{\frac{1}{2}(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}^T)})\cdot\boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}}$$

$\bar{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{y},t) = \bar{\bar{\mathbf{M}}}^T > \mathbf{0}$ …globale Massen-Blockdiagonalmatrix
$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{y},t)$ … globale Jacobimatrix
$\mathbf{y}(t)$ …Vektor der verallg. Koordinaten
$\bar{\mathbf{q}}^c(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)$ …Vektor d. Coriolis- & Zentrif.-Kräfte
$\bar{\mathbf{q}}^e(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)$ …Vektor d. eingeprägten Kräfte
$\bar{\mathbf{Q}}$ …glob. Verteilungsmatrix d. Reaktionskräfte
$\mathbf{g}$ …Vektor der verallg. Zwangskräfte
$\mathbf{M}(\mathbf{y},t) = \mathbf{M}^T > \mathbf{0}$ … Massenmatrix
$\mathbf{k}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)$ …Vektor d. verallg. Kreiselkräfte
$\mathbf{q}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)$ …Vektor d. verallg. eingepr. Kräfte
$\boldsymbol{\eta}(t)$ …Vektor kleiner Bewegungen

$\hat{\mathbf{k}}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)$…Einfluss d. Kreiselkräfte auf Reaktionskr.
$\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)$…Einfluss eingepr. Kräfte auf Reaktionskr.
$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{y},t) = \hat{\mathbf{N}}^T > \mathbf{0}$ …Reaktionsmatrix
$\tilde{\mathbf{M}}(t) = \tilde{\mathbf{M}}^T > \mathbf{0}$ …linearisierte Massenmatrix
$\mathbf{P}(t)$ …Matrix d. geschwindigkeitsabh. Kräfte
$\mathbf{Q}(t)$ …Matrix d. lageabhängigen Kräfte
$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T \geq \mathbf{0}$ …Dämpfungsmatrix
$\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T \geq \mathbf{0}$ …Matrix gyroskopischer Kräfte
$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T \geq \mathbf{0}$ …Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{N} = -\mathbf{N}^T \geq \mathbf{0}$ …Matrix nichtkonservativer Lagekr.
$\mathbf{h}(t)$ …Erregervektor
konservatives System, Energieerhaltung: $\mathbf{D} = \mathbf{N} = \mathbf{h} = \mathbf{0}$

Eigenschaften der Fundamentalmatrix

1. Darstellung als Matrizenexponentialfunktion

$$\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{A}t)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k$$

konvergente unendliche Reihe

2. Die Fundamentalmatrix genügt der Differentialgleichung

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\phi}(t) \cdot \mathbf{A}, \quad \boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{E}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^3 t^2 + \cdots \\
&= \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots\right) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\phi}(t) \\
&\overset{\text{oder}}{=} \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots\right) \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{\phi}(t) \cdot \mathbf{A}
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{E}$ offensichtlich

3. Überführungseigenschaft

$$\boldsymbol{\phi}(t_1 + t_2) = \boldsymbol{\phi}(t_1) \cdot \boldsymbol{\phi}(t_2) = \boldsymbol{\phi}(t_2) \cdot \boldsymbol{\phi}(t_1)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k (t_1 + t_2)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} t_1^j t_2^{k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!} t_1^j t_2^{k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} (\mathbf{A}t_1)^j \frac{1}{(k-j)!} (\mathbf{A}t_2)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{j!} (\mathbf{A}t_1)^j \frac{1}{(k-j)!} (\mathbf{A}t_2)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\mathbf{A}t_1)^j \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!} (\mathbf{A}t_2)^{k'} \\
&= e^{\mathbf{A}t_1} e^{\mathbf{A}t_2} = e^{\mathbf{A}t_2} e^{\mathbf{A}t_1}
\end{aligned}$$

4. Inverse

$$\boldsymbol{\phi}(t)^{-1} = \boldsymbol{\phi}(-t)$$

Beweis: Aus der Überführungseigenschaft folgt mit $t_2 = -t_1$

$$\boldsymbol{\phi}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}(-t) = \boldsymbol{\phi}\big(t + (-t)\big) = \boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{E} \qquad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{\phi}(t)^{-1} = (e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} = \boldsymbol{\phi}(-t)$$

5. Determinante (Formel von Jacobi−Liouville)

$$\det \boldsymbol{\phi}(t) = e^{t\,\mathrm{Sp}\mathbf{A}} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Sp}\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \quad \text{Spur von } \mathbf{A}$$

Beweis: Aus der Determinantenformel

$$\det \boldsymbol{\phi}(t) = \sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \\ \text{Perm. von } (1 \dots n)}} \mathrm{sign}(i_1 \dots i_n)\varphi_{i_1 1}\varphi_{i_2 2} \dots \varphi_{i_n n}$$

folgt

$$\frac{d}{dt}\det \boldsymbol{\phi}(t) = \sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \\ \text{Perm. von } (1 \dots n)}} \mathrm{sign}(i_1 \dots i_n)\dot{\varphi}_{i_1 1}\varphi_{i_2 2} \dots \varphi_{i_n n}$$

$$+ \ \dots \ + \sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \\ \text{Perm. von } (1 \dots n)}} \mathrm{sign}(i_1 \dots i_n)\varphi_{i_1 1}\varphi_{i_2 2} \dots \dot{\varphi}_{i_n n}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\det \boldsymbol{\phi}(t) = \det[\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1(t)|\boldsymbol{\varphi}_2(t)| \dots |\boldsymbol{\varphi}_n(t)] + \dots + \det[\boldsymbol{\varphi}_1(t)|\boldsymbol{\varphi}_2(t)| \dots |\dot{\boldsymbol{\varphi}}_n(t)]$$

$$= \det[\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(t)|\,\boldsymbol{\varphi}_2(t)| \dots |\boldsymbol{\varphi}_n(t)] + \dots + \det[\boldsymbol{\varphi}_1(t)|\boldsymbol{\varphi}_2(t)| \dots |\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varphi}_n(t)]$$

Mit

$$\boldsymbol{\varphi}_k = \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{e}_k \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{e}_k \equiv \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_i \boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{A}_{ik}$$

erhält man wegen

$$\det\left[\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \sum_i \boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{A}_{ik} \dots \boldsymbol{\varphi}_n\right] \equiv \det[\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \mathbf{A}_{kk}\boldsymbol{\varphi}_k \dots \boldsymbol{\varphi}_n] \equiv \mathbf{A}_{kk} \det[\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_k \dots \boldsymbol{\varphi}_n]$$

das Zwischenergebnis

$$\frac{d}{dt}\det \boldsymbol{\phi}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \det \boldsymbol{\phi}(t)$$

Die Wronski−Determinante $\det \boldsymbol{\phi}(t)$ genügt damit der skalaren Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\det \boldsymbol{\phi}(t) = \mathrm{Sp}\,\mathbf{A}\det \boldsymbol{\phi}(t)$$

Durch Integration dieser Beziehung mit der Anfangsbedingung $\det \boldsymbol{\phi}\,(0) = \det \mathbf{E} = 1$ ergibt sich die Formel von Jacobi−Liouville

$$\int_1^{\det \phi} \frac{d(\overline{\det \boldsymbol{\phi}})}{\det \boldsymbol{\phi}} = \mathrm{Sp}\,A \int_0^t d\tau$$

$$\Rightarrow \ln(\det \boldsymbol{\phi}) = t\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{A}$$

6. Integration

$$\int_0^t \boldsymbol{\phi}\,(\tau)d\tau = \mathbf{A}^{-1}\cdot(\boldsymbol{\phi}(t) - \mathbf{E}) = (\boldsymbol{\phi}(t) - \mathbf{E})\cdot\mathbf{A}^{-1} \quad \text{für } \det \mathbf{A} \neq 0$$

Beweis:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt} = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\phi}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbf{E}}^{\boldsymbol{\phi}(t)} d\overline{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{A}\cdot\int_0^t \boldsymbol{\phi}\;d\tau$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\phi}(t) - \mathbf{E} = \mathbf{A}\cdot\int_0^t \boldsymbol{\phi}(\tau)d\tau$$

Schwinger mit einem Freiheitsgrad

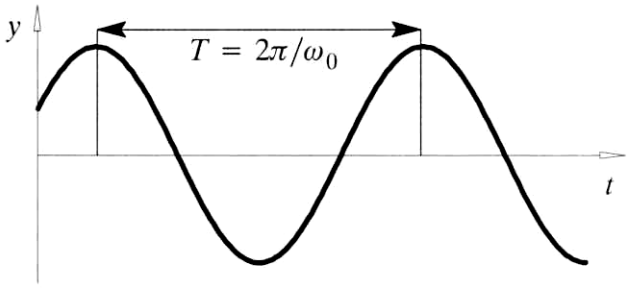
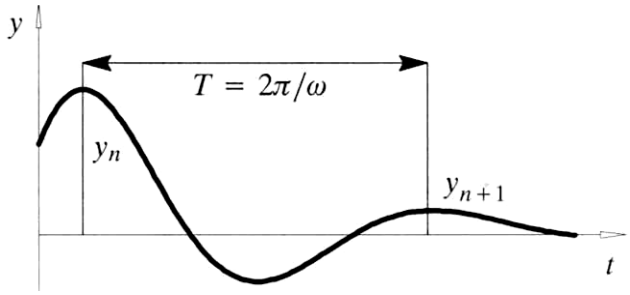
Schwingungsgleichung: $\ddot{y}(t) + 2\,\delta\,\dot{y}(t) + \omega_0^2\,y(t) = 0$

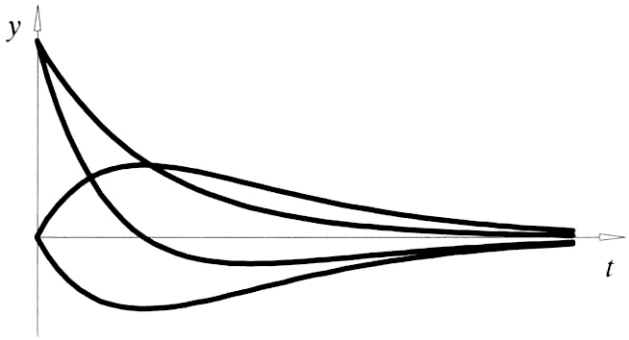
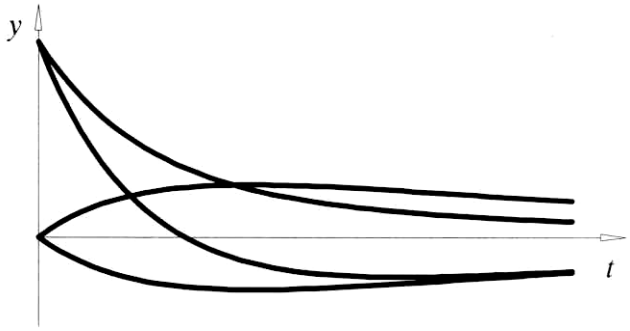
Anfangsbedingungen: Lage $y(0) = y_0$
Geschwindigkeit $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$

Lösungsansatz: $y(t) = e^{\lambda t}$ $\Rightarrow y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{C}$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Diskussion der Eigenwerte

Fallunterscheidung		Eigenwerte	Schwingung
keine Dämpfung	$\delta = 0$	$\lambda_{1,2} = \pm i\,\omega_0$	$y(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$ $= (C_1 + C_2)\cos\omega_0 t + (C_1 - C_2) i \sin\omega_0 t$ $= A \sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$ $= C\cos(\omega_0 t - \varphi)$ 
schwache Dämpfung	$\delta^2 < \omega_0^2$	$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$	$y(t) = C_1 e^{(-\delta + i\omega)t} + C_2 e^{(-\delta - i\omega)t}$ $= e^{-\delta t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})$ $= e^{-\delta t}(A\sin\omega t + B\cos\omega t)$ $= C e^{-\delta t}\cos(\omega t - \varphi)$  log. Dekrement $\vartheta = \delta T = \ln\frac{y_n}{y_{n+1}}$ Lehrsches Dämpfungsmaß $D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2 + 4\pi^2}}$

Grenzfall	$\delta^2 = \omega_0^2$	$\lambda_{1,2} = -\delta$	$y(t) = e^{-\delta t}(\overline{A}t + \overline{B})$ 
starke Dämpfung	$\delta^2 > \omega_0^2$	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$	$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ 

Stabilitätskriterien

Ein lineares zeitinvariantes System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ ist genau dann

asymptotisch stabil, wenn für alle $j = 1(1)n$ gilt

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$$

grenzstabil, wenn für alle $j = 1(1)n$ gilt

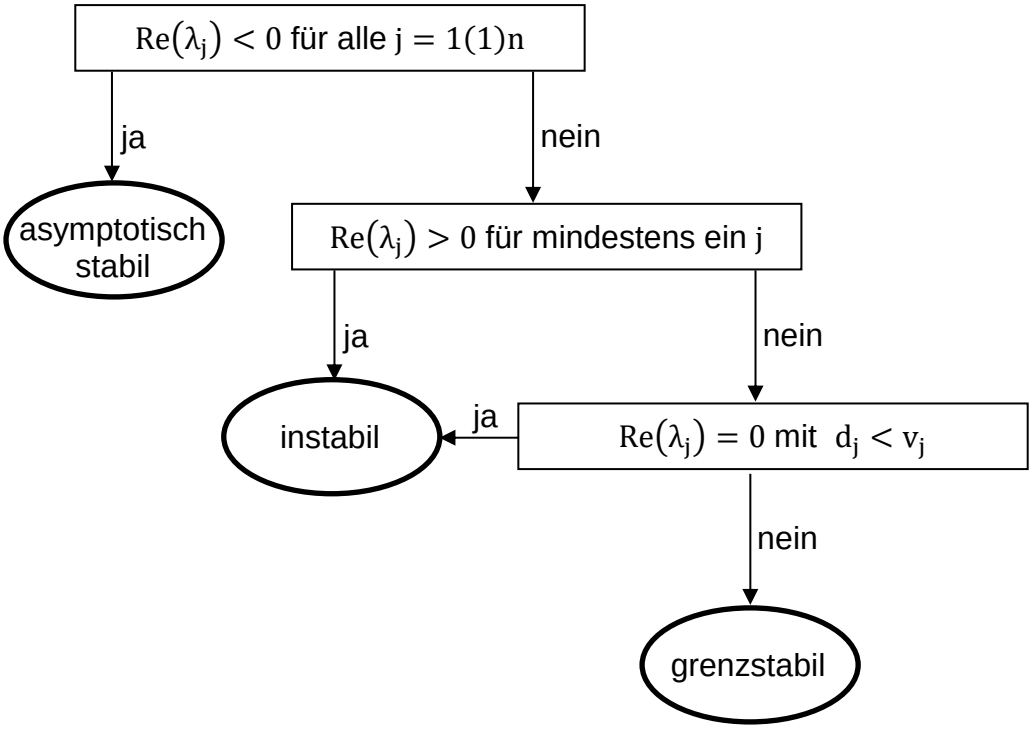
$$\mathrm{Re}(\lambda_j) \leq 0$$

und $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ für mindestens ein k wobei $d_k = v_k$ (Fall I)

instabil, wenn für mindestens ein j gilt

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0$$

oder $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ mit $d_j < v_j$ (Fall II)



Modaltransformation und Schwingungsanalyse

Zustandsbetrachtung ←→ **mechanische Betrachtung**

Differentialgleichungen

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{y}}\\ \ddot{\mathbf{y}}\end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}\\ -\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{Q} & -\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{P}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2f}$$

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{f}$$

Lösungsansatz

$$\mathbf{x}_j = \tilde{\mathbf{x}}_j\, e^{\lambda_j t} \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_j = \tilde{\mathbf{x}}_j \lambda_j\, e^{\lambda_j t}$$

$$\mathbf{y}_j = \tilde{\mathbf{y}}_j\, e^{\lambda_j t} \rightarrow \dot{\mathbf{y}}_j = \tilde{\mathbf{y}}_j \lambda_j\, e^{\lambda_j t} \rightarrow \ddot{\mathbf{y}}_j = \tilde{\mathbf{y}}_j \lambda_j^2\, e^{\lambda_j t}$$

Zusammenhang $\boxed{\tilde{\mathbf{x}}_j = \begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{y}}_j\\ \lambda_j\,\tilde{\mathbf{y}}_j\end{bmatrix}}$

gewöhnliches EWP mit $2f$ Gleichungen

$$\left(\lambda_j\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)\cdot\tilde{\mathbf{x}}_j\, e^{\lambda_j t} = \mathbf{0}$$

quadratisches EWP mit f Gleichungen

$$\left(\mathbf{M}\lambda_j^2 + \mathbf{P}\lambda_j + \mathbf{Q}\right)\cdot\tilde{\mathbf{y}}_j\, e^{\lambda_j t} = \mathbf{0}$$

charakteristisches Polynom

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$$

$$q(\lambda) = \det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{P}\lambda + \mathbf{Q})$$

Zusammenhang $\boxed{p(\lambda) = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\, q(\lambda)}$

Eigenwerte und Eigenvektoren
(auch genannt "Eigen- oder Schwingungsformen")

⇒ EW: λ_j und EV: $\tilde{\mathbf{x}}_j$

identisch

$$\boxed{\lambda_j = \sigma_j \pm i\,\omega_j = -\delta_j \pm i\sqrt{\omega_{0j}^2 - \delta_j^2},\ \text{mit } i = \sqrt{-1}}$$

⇒ EW: λ_j und EV: $\tilde{\mathbf{y}}_j$

Modalmatrix

$$\mathbf{X} := \left[\tilde{\mathbf{x}}_1 \ldots \tilde{\mathbf{x}}_j \ldots\right]$$

$$\mathbf{Y} := \left[\tilde{\mathbf{y}}_1 \ldots \tilde{\mathbf{y}}_j \ldots\right]$$

klassische Ähnlichkeitstransformation

→Zustands-Normalform,
mit Normalkoordinaten

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{X}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}}_{\mathbf{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_j)}\cdot\hat{\mathbf{x}}, \quad \text{mit } \mathbf{x} = \mathbf{X}\cdot\hat{\mathbf{x}}$$

spezielle Ähnlichkeitstransformation
(Kongruenz-/Modaltransformation)

→Normalform der Bewegungsgleichungen,
mit "modalen" Normalkoordinaten

$$\underbrace{\mathbf{Y}^T\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{Y}}_{\widehat{\mathbf{M}}}\cdot\ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \underbrace{\mathbf{Y}^T\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Y}}_{\widehat{\mathbf{P}}}\cdot\dot{\hat{\mathbf{y}}} + \underbrace{\mathbf{Y}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Y}}_{\widehat{\mathbf{Q}}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0},$$

mit $\mathbf{y} = \mathbf{Y}\cdot\hat{\mathbf{y}}$

Analyse bei harmonischer Anregung

Zustandsbetrachtung ←→ **mechanische Betrachtung**

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{y}}\\ \ddot{\mathbf{y}}\end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}\\ -\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{Q} & -\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{P}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{h}\end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{h}$$

Vektor der harmonischen Anregung

$$\mathbf{b} = \mathbf{b_0}e^{i\Omega t} + \bar{\mathbf{b}}_0 e^{-i\Omega t} = \mathbf{b}^c\cos\Omega t + \mathbf{b}^s\sin\Omega t$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 e^{i\Omega t} + \bar{\mathbf{h}}_0 e^{-i\Omega t} = \mathbf{h}^c\cos\Omega t + \mathbf{h}^s\sin\Omega t$$

$$\mathbf{b}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}^c - i\mathbf{b}^s)$$

komplexer Amplitudenvektor der harmonischen **Anregung**

$$\mathbf{h}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{h}^c - i\mathbf{h}^s)$$

komplexer Amplitudenvektor der harmonischen **Antwort**

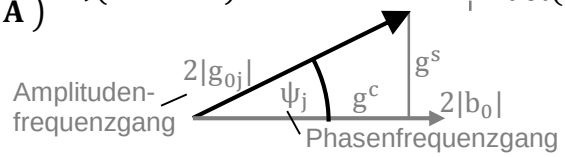
$$\mathbf{g_0} = \underbrace{\left(i\Omega\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}}\cdot\mathbf{b_0}$$

$$\mathbf{q_0} = \underbrace{(-\mathbf{M}\Omega^2 + \mathbf{P}\Omega i + \mathbf{Q})^{-1}}\cdot\mathbf{h}_0$$

Frequenzgangsmatrix

$$\frac{1}{\det\left(i\Omega\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)}\operatorname{adj}\left(i\Omega\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)$$

$$\frac{1}{\det(-\mathbf{M}\Omega^2 + \mathbf{P}\Omega i + \mathbf{Q})}\operatorname{adj}(-\mathbf{M}\Omega^2 + \mathbf{P}\Omega i + \mathbf{Q})$$



Spezialfall: Modaltransformation eines nichtgyroskopisch konservativen Systems

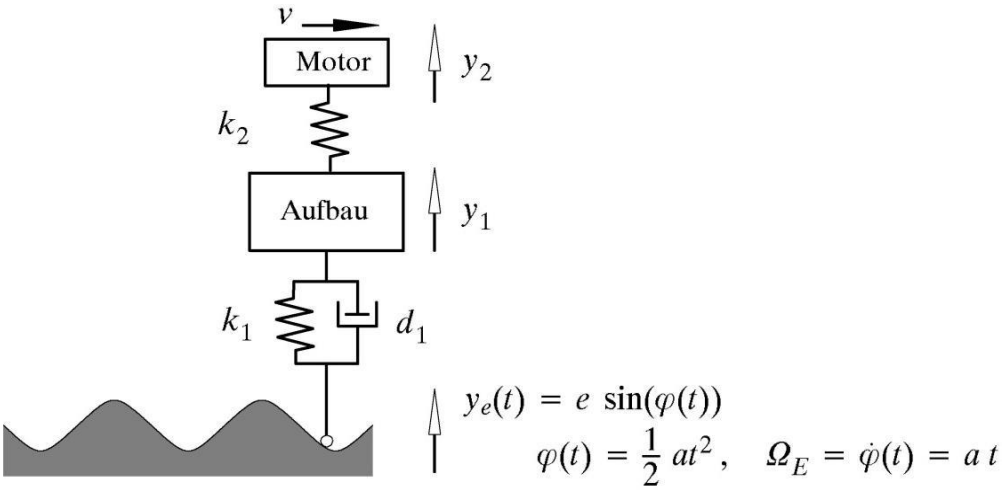
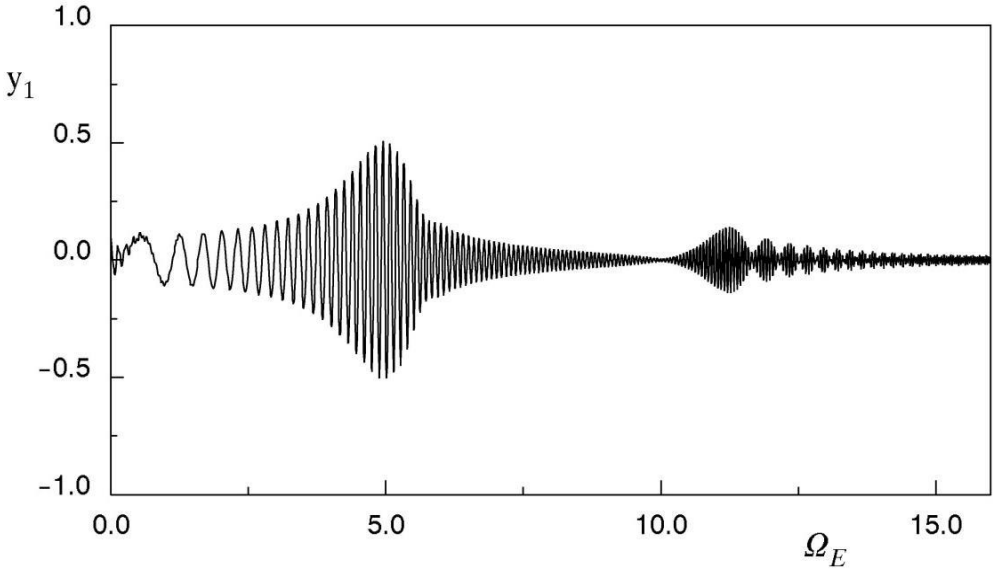
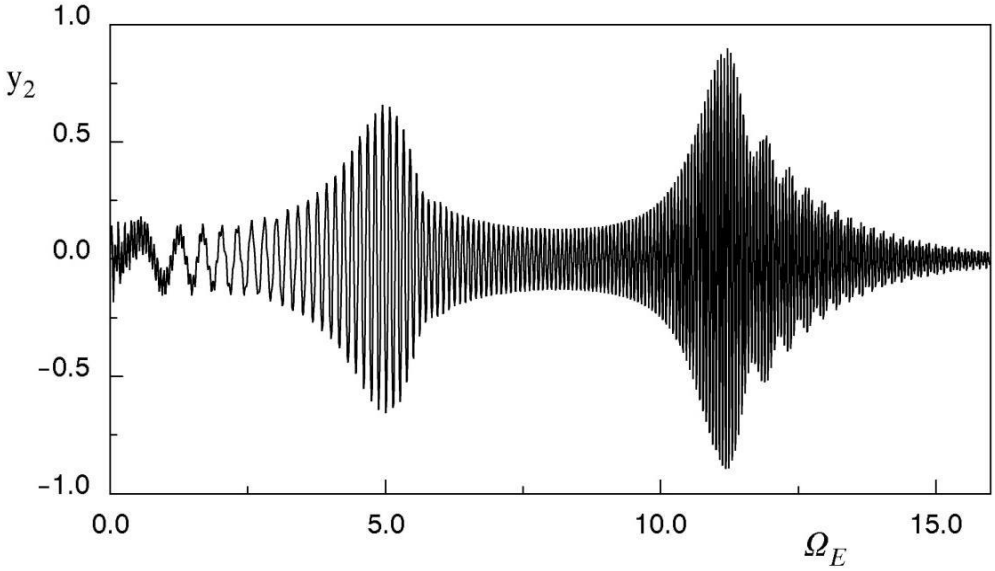
Bewegungsgleichung: $\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{0}$

charakteristische Gleichung: $q(\lambda) = \det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K}) = 0$

Eigenwerte und Eigenvektoren: $\Rightarrow$ EW: $\lambda_j = i\,\omega_{0j}$ und EV: $\tilde{\mathbf{y}}_{0j}$

massennormierte Eigenvektoren: $\bar{\mathbf{y}}_{0j} := \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{y}}_{0j}^T\cdot\mathbf{M}\cdot\tilde{\mathbf{y}}_{0j}}}\tilde{\mathbf{y}}_{0j} \quad\rightarrow\quad \hat{\mathbf{Y}} := \left[\bar{\mathbf{y}}_{01}\ \dots\ \bar{\mathbf{y}}_{0j}\ \dots\right]$

entkoppelte Bewegungsgleichungen: $\underbrace{\hat{\mathbf{Y}}^T\cdot\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{E}}\cdot\ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \underbrace{\hat{\mathbf{Y}}^T\cdot\mathbf{K}\cdot\hat{\mathbf{Y}}}_{\operatorname{diag}(\omega_{0j}^2)}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$, mit $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{Y}}\cdot\underbrace{\hat{\mathbf{y}}}$

"modale" Normalkoordinaten

Amplitudenfrequenzgang der Hubschwingungen eines Automobils