Modaltransformation und Schwingungsanalyse

Zustandsbetrachtung ←→ **mechanische Betrachtung**

Differentialgleichungen

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{y}}\\ \ddot{\mathbf{y}}\end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}\\ -\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{Q} & -\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{P}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} \quad \in \mathbb{R}^{2f}$$

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \in \mathbb{R}^{f}$$

Lösungsansatz

$$\mathbf{x}_j = \tilde{\mathbf{x}}_j\, e^{\lambda_j t} \;\rightarrow\; \dot{\mathbf{x}}_j = \tilde{\mathbf{x}}_j \lambda_j\, e^{\lambda_j t}$$

$$\mathbf{y}_j = \tilde{\mathbf{y}}_j\, e^{\lambda_j t} \rightarrow \dot{\mathbf{y}}_j = \tilde{\mathbf{y}}_j \lambda_j\, e^{\lambda_j t} \rightarrow \ddot{\mathbf{y}}_j = \tilde{\mathbf{y}}_j \lambda_j^2\, e^{\lambda_j t}$$

Zusammenhang $\boxed{\tilde{\mathbf{x}}_j = \begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{y}}_j\\ \lambda_j\,\tilde{\mathbf{y}}_j\end{bmatrix}}$

gewöhnliches EWP mit $2f$ Gleichungen

$$(\lambda_j \mathbf{E} - \mathbf{A})\cdot\tilde{\mathbf{x}}_j\, e^{\lambda_j t} = \mathbf{0}$$

quadratisches EWP mit f Gleichungen

$$(\mathbf{M}\lambda_j^2 + \mathbf{P}\lambda_j + \mathbf{Q})\cdot\tilde{\mathbf{y}}_j\, e^{\lambda_j t} = \mathbf{0}$$

charakteristisches Polynom

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$$

$$q(\lambda) = \det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{P}\lambda + \mathbf{Q})$$

Zusammenhang $\boxed{p(\lambda) = \frac{1}{\det \mathbf{M}} q(\lambda)}$

Eigenwerte und Eigenvektoren
(auch genannt "Eigen- oder Schwingungsformen")

⇒ EW: λ_j und EV: $\tilde{\mathbf{x}}_j$

$\boxed{\lambda_j = \sigma_j \pm i\,\omega_j = -\delta_j \pm i\sqrt{\omega_{0j}^2 - \delta_j^2}, \text{ mit } i = \sqrt{-1}}$

⇒ EW: λ_j und EV: $\tilde{\mathbf{y}}_j$

identisch

Modalmatrix

$$\mathbf{X} := [\tilde{\mathbf{x}}_1 \dots \tilde{\mathbf{x}}_j \dots]$$

$$\mathbf{Y} := [\tilde{\mathbf{y}}_1 \dots \tilde{\mathbf{y}}_j \dots]$$

klassische Ähnlichkeitstransformation

→Zustands-Normalform,
mit Normalkoordinaten

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{X}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}}_{\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_j)} \cdot \hat{\mathbf{x}}, \quad \text{mit } \mathbf{x} = \mathbf{X}\cdot\hat{\mathbf{x}}$$

spezielle Ähnlichkeitstransformation
(Kongruenz-/Modaltransformation)

→Normalform der Bewegungsgleichungen,
mit "modalen" Normalkoordinaten

$$\underbrace{\mathbf{Y}^T\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{Y}}_{\widehat{\mathbf{M}}}\cdot\ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \underbrace{\mathbf{Y}^T\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Y}}_{\widehat{\mathbf{P}}}\cdot\dot{\hat{\mathbf{y}}} + \underbrace{\mathbf{Y}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Y}}_{\widehat{\mathbf{Q}}}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0},$$

mit $\mathbf{y} = \mathbf{Y}\cdot\hat{\mathbf{y}}$

Analyse bei harmonischer Anregung

Zustandsbetrachtung ←→ **mechanische Betrachtung**

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{y}}\\ \ddot{\mathbf{y}}\end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}\\ -\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{Q} & -\mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{P}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{M}^{-1}\cdot\mathbf{h}\end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{h}$$

Vektor der harmonischen Anregung

$$\mathbf{b} = \mathbf{b_0}e^{i\Omega t} + \bar{\mathbf{b}}_\mathbf{0}e^{-i\Omega t} = \mathbf{b}^c\cos\Omega t + \mathbf{b}^s\sin\Omega t$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0e^{i\Omega t} + \bar{\mathbf{h}}_0e^{-i\Omega t} = \mathbf{h}^c\cos\Omega t + \mathbf{h}^s\sin\Omega t$$

$$\mathbf{b}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}^c - i\mathbf{b}^s)$$

komplexer Amplitudenvektor
der harmonischen **Anregung**

$$\mathbf{h}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{h}^c - i\mathbf{h}^s)$$

komplexer Amplitudenvektor der harmonischen **Antwort**

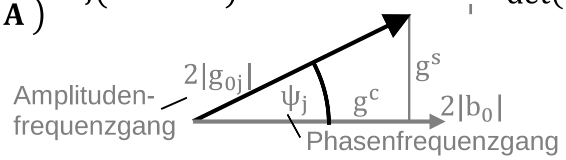
$$\mathbf{g_0} = \underbrace{\left(i\Omega\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}} \cdot \mathbf{b_0}$$

$$\mathbf{q_0} = \underbrace{(-\mathbf{M}\Omega^2 + \mathbf{P}\Omega i + \mathbf{Q})^{-1}} \cdot \mathbf{h}_0$$

Frequenzgangsmatrix

$$\frac{1}{\det\left(i\Omega\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)}\mathrm{adj}\left(i\Omega\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)$$

$$\frac{1}{\det(-\mathbf{M}\Omega^2 + \mathbf{P}\Omega i + \mathbf{Q})}\mathrm{adj}(-\mathbf{M}\Omega^2 + \mathbf{P}\Omega i + \mathbf{Q})$$



Spezialfall: Modaltransformation eines nichtgyroskopisch konservativen Systems

Bewegungsgleichung: $\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{0}$

charakteristische Gleichung: $q(\lambda) = \det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K}) = 0$

Eigenwerte und Eigenvektoren: ⇒ EW: $\lambda_j = i\,\omega_{0j}$ und EV: $\tilde{\mathbf{y}}_{0j}$

massennormierte Eigenvektoren: $\bar{\mathbf{y}}_{0j} := \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{y}}_{0j}^T\cdot\mathbf{M}\cdot\tilde{\mathbf{y}}_{0j}}}\tilde{\mathbf{y}}_{0j} \;\rightarrow\; \hat{\mathbf{Y}} := \left[\bar{\mathbf{y}}_{01} \ldots \bar{\mathbf{y}}_{0j} \ldots\right]$

entkoppelte Bewegungsgleichungen: $\underbrace{\hat{\mathbf{Y}}^T\cdot\mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{E}}\cdot\ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \underbrace{\hat{\mathbf{Y}}^T\cdot\mathbf{K}\cdot\hat{\mathbf{Y}}}_{\mathrm{diag}\left(\omega_{0j}^2\right)}\cdot\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$, mit $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{Y}}\cdot\underbrace{\hat{\mathbf{y}}}$

"modale"
Normalkoordinaten