Eigenschaften der Fundamentalmatrix

1. Darstellung als Matrizenexponentialfunktion

$$\boldsymbol{\phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{A}t)^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k$$

konvergente unendliche Reihe

2. Die Fundamentalmatrix genügt der Differentialgleichung

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\phi}(t) \cdot \mathbf{A}, \quad \boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{E}$$

Beweis:
$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^3 t^2 + \cdots \\
&= \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots\right) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\phi}(t) \\
&\overset{\text{oder}}{=} \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots\right) \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{\phi}(t) \cdot \mathbf{A}
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\phi}(0) = \mathbf{E}$ offensichtlich

3. Überführungseigenschaft

$$\boldsymbol{\phi}(t_1 + t_2) = \boldsymbol{\phi}(t_1) \cdot \boldsymbol{\phi}(t_2) = \boldsymbol{\phi}(t_2) \cdot \boldsymbol{\phi}(t_1)$$

Beweis:
$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k (t_1 + t_2)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} t_1^j t_2^{k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!} t_1^j t_2^{k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}(\mathbf{A}t_1)^j \frac{1}{(k-j)!} (\mathbf{A}t_2)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{j!}(\mathbf{A}t_1)^j \frac{1}{(k-j)!} (\mathbf{A}t_2)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(\mathbf{A}t_1)^j \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!}(\mathbf{A}t_2)^{k'} \\
&= e^{\mathbf{A}t_1} e^{\mathbf{A}t_2} = e^{\mathbf{A}t_2} e^{\mathbf{A}t_1}
\end{aligned}$$

4. Inverse

$$\boldsymbol{\Phi}(t)^{-1} = \boldsymbol{\Phi}(-t)$$

Beweis: Aus der Überführungseigenschaft folgt mit $t_2 = -t_1$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) \cdot \boldsymbol{\Phi}(-t) = \boldsymbol{\Phi}\big(t + (-t)\big) = \boldsymbol{\Phi}(0) = \mathbf{E} \qquad \text{oder}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)^{-1} = (e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} = \boldsymbol{\Phi}(-t)$$

5. Determinante (Formel von Jacobi−Liouville)

$$\det \boldsymbol{\Phi}(t) = e^{t\,\mathrm{Sp}\mathbf{A}} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Sp}\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \quad \text{Spur von } \mathbf{A}$$

Beweis: Aus der Determinantenformel

$$\det \boldsymbol{\Phi}(t) = \sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \\ \text{Perm. von } (1 \dots n)}} \mathrm{sign}(i_1 \dots i_n)\varphi_{i_1 1}\varphi_{i_2 2} \dots \varphi_{i_n n}$$

folgt

$$\frac{d}{dt}\det \boldsymbol{\Phi}(t) = \sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \\ \text{Perm. von } (1 \dots n)}} \mathrm{sign}(i_1 \dots i_n)\dot{\varphi}_{i_1 1}\varphi_{i_2 2} \dots \varphi_{i_n n} + \dots + \sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \\ \text{Perm. von } (1 \dots n)}} \mathrm{sign}(i_1 \dots i_n)\varphi_{i_1 1}\varphi_{i_2 2} \dots \dot{\varphi}_{i_n n}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\det \boldsymbol{\Phi}(t) &= \det[\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1(t)|\boldsymbol{\varphi}_2(t)| \dots |\boldsymbol{\varphi}_n(t)] + \dots + \det[\boldsymbol{\varphi}_1(t)|\boldsymbol{\varphi}_2(t)| \dots |\dot{\boldsymbol{\varphi}}_n(t)] \\ &= \det[\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1(t)|\,\boldsymbol{\varphi}_2(t)| \dots |\boldsymbol{\varphi}_n(t)] + \dots + \det[\boldsymbol{\varphi}_1(t)|\boldsymbol{\varphi}_2(t)| \dots |\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varphi}_n(t)]\end{aligned}$$

Mit

$$\boldsymbol{\varphi}_k = \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{e}_k \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varphi}_k = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{e}_k \equiv \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_i \boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{A}_{ik}$$

erhält man wegen

$$\det\left[\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \sum_i \boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{A}_{ik} \dots \boldsymbol{\varphi}_n\right] \equiv \det[\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \mathbf{A}_{kk}\boldsymbol{\varphi}_k \dots \boldsymbol{\varphi}_n] \equiv \mathbf{A}_{kk}\det[\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_k \dots \boldsymbol{\varphi}_n]$$

das Zwischenergebnis

$$\frac{d}{dt}\det \boldsymbol{\Phi}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}\det \boldsymbol{\Phi}(t)$$

Die Wronski−Determinante $\det \boldsymbol{\phi}(t)$ genügt damit der skalaren Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\det \boldsymbol{\phi}(t) = \mathrm{Sp}\,\mathbf{A} \det \boldsymbol{\phi}(t)$$

Durch Integration dieser Beziehung mit der Anfangsbedingung $\det \boldsymbol{\phi}(0) = \det \mathbf{E} = 1$ ergibt sich die Formel von Jacobi−Liouville

$$\int_{1}^{\det \phi} \frac{d(\overline{\det \boldsymbol{\phi}})}{\det \boldsymbol{\phi}} = \mathrm{Sp}\, A \int_0^t d\tau$$

$$\Rightarrow \ln(\det \boldsymbol{\phi}) = t\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{A}$$

6. Integration

$$\int_0^t \boldsymbol{\phi}(\tau)d\tau = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\phi}(t) - \mathbf{E}) = (\boldsymbol{\phi}(t) - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad \text{für } \det \mathbf{A} \neq 0$$

Beweis:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\phi}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbf{E}}^{\boldsymbol{\phi}(t)} d\overline{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{A} \cdot \int_0^t \boldsymbol{\phi}\, d\tau$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\phi}(t) - \mathbf{E} = \mathbf{A} \cdot \int_0^t \boldsymbol{\phi}(\tau)d\tau$$