# Gleichungen gewöhnlicher Mehrkörpersysteme (MKS)

**Newton-Eulersche Gleichungen** (DGLn, i.a. nichtlinear, mit Reaktionskräften und -momenten)

$$\boxed{\overbrace{\begin{bmatrix} m_1\mathbf{E} & \mathbf{0} & & & \\ \mathbf{0} & m_2\mathbf{E} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{0} & \dots \end{bmatrix}}^{\bar{\bar{\mathbf{M}}}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}_{T1} \\ \bar{\mathbf{J}}_{T2} \\ \dots \\ \bar{\mathbf{J}}_{R1} \\ \dots \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{J}}} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \overbrace{\begin{bmatrix} m_1\bar{\mathbf{a}}_1 \\ m_2\bar{\mathbf{a}}_2 \\ \dots \\ \mathbf{I}_1\cdot\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1\cdot\mathbf{I}_1\cdot\boldsymbol{\omega}_1 \\ \dots \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{q}}^c} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{f}_2^e \\ \dots \\ \mathbf{l}_1^e \\ \dots \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{q}}^e} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T1} \\ \mathbf{F}_{T2} \\ \dots \\ \mathbf{F}_{R1} \\ \dots \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{Q}}} \cdot \mathbf{g}}$$

Projektion zur Elimination der Reaktionskräfte und -momente

Projektion zur Berechnung der Reaktionskräfte und -momente

$$\underbrace{\bar{\mathbf{J}}^T\cdot\bar{\bar{\mathbf{M}}}\cdot\bar{\mathbf{J}}}_{\mathbf{M}}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\bar{\mathbf{J}}^T\cdot\bar{\mathbf{q}}^c}_{\mathbf{k}} = \underbrace{\bar{\mathbf{J}}^T\cdot\bar{\mathbf{q}}^e}_{\mathbf{q}} + \underbrace{\bar{\mathbf{J}}^T\cdot\bar{\mathbf{Q}}}_{\mathbf{0}}\cdot\mathbf{g}$$

$$\boxed{\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k} = \mathbf{q}}$$

MKS-**Bewegungsgleichungen**
(DGLn, i.a. nichtlinear)

Ortho-gonalitäts-beziehung

Optional und falls physikalisch gerechtfertigt: **Linearisierung** um eine Soll-Bewegung

$$\underbrace{\bar{\mathbf{Q}}^T\cdot\bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1}\cdot\bar{\bar{\mathbf{M}}}\cdot\bar{\mathbf{J}}}_{\mathbf{0}}\cdot\ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\bar{\mathbf{Q}}^T\cdot\bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1}\cdot\bar{\mathbf{q}}^c}_{\hat{\mathbf{k}}} = \underbrace{\bar{\mathbf{Q}}^T\cdot\bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1}\cdot\bar{\mathbf{q}}^e}_{\hat{\mathbf{q}}} + \underbrace{\bar{\mathbf{Q}}^T\cdot\bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1}\cdot\bar{\mathbf{Q}}}_{\hat{\mathbf{N}}}\cdot\mathbf{g}$$

Ortho-gonalitäts-beziehung

$$\boxed{\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{g}}$$

Optional: **Reaktionsgleichungen** (LGS)

$$\underbrace{\mathbf{M}(\mathbf{y}_s,t)}_{\tilde{\mathbf{M}}}\cdot\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\Big|_s - \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\Big|_s\right)}_{\mathbf{P}}\cdot\dot{\boldsymbol{\eta}} + \underbrace{\left(\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{y}}\Big|_s\cdot\ddot{\mathbf{y}}_s + \frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\mathbf{y}}\Big|_s - \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{y}}\Big|_s\right)}_{\mathbf{Q}}\cdot\boldsymbol{\eta} = \underbrace{\mathbf{q}(\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s,t) - \mathbf{k}(\mathbf{y}_s,\dot{\mathbf{y}}_s,t) - \mathbf{M}(\mathbf{y}_s,t)\cdot\ddot{\mathbf{y}}_s}_{\mathbf{h}}$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{M}}\cdot\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{P}\cdot\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}}$$

**linearisierte Bewegungsgleichungen** (DGL)

Optional und falls System zeitinvariant: Aufteilung zur physikalischen Interpretation

$$\mathbf{P} = \underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbf{P}+\mathbf{P}^T)}_{\mathbf{D}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbf{P}-\mathbf{P}^T)}_{\mathbf{G}}, \qquad \mathbf{Q} = \underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbf{Q}+\mathbf{Q}^T)}_{\mathbf{K}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}^T)}_{\mathbf{N}}$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{M}}\cdot\ddot{\boldsymbol{\eta}} + (\mathbf{D}+\mathbf{G})\cdot\dot{\boldsymbol{\eta}} + (\mathbf{K}+\mathbf{N})\cdot\boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}}$$

$\bar{\bar{\mathbf{M}}}(\mathbf{y},t) = \bar{\bar{\mathbf{M}}}^T > \mathbf{0}$ …globale Massen-Blockdiagonalmatrix
$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{y},t)$ … globale Jacobimatrix
$\mathbf{y}(t)$ …Vektor der verallg. Koordinaten
$\bar{\mathbf{q}}^c(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)$ …Vektor d. Coriolis- & Zentrif.-Kräfte
$\bar{\mathbf{q}}^e(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)$ …Vektor d. eingeprägten Kräfte
$\bar{\mathbf{Q}}$ …glob. Verteilungsmatrix d. Reaktionskräfte
$\mathbf{g}$ …Vektor der verallg. Zwangskräfte
$\mathbf{M}(\mathbf{y},t) = \mathbf{M}^T > \mathbf{0}$ … Massenmatrix
$\mathbf{k}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)$ …Vektor d. verallg. Kreiselkräfte
$\mathbf{q}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)$ …Vektor d. verallg. eingepr. Kräfte
$\boldsymbol{\eta}(t)$ …Vektor kleiner Bewegungen
$\hat{\mathbf{k}}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)$…Einfluss d. Kreiselkräfte auf Reaktionskr.
$\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},t)$…Einfluss eingepr. Kräfte auf Reaktionskr.
$\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{y},t) = \hat{\mathbf{N}}^T > \mathbf{0}$ …Reaktionsmatrix
$\tilde{\mathbf{M}}(t) = \tilde{\mathbf{M}}^T > \mathbf{0}$ …linearisierte Massenmatrix
$\mathbf{P}(t)$ …Matrix d. geschwindigkeitsabh. Kräfte
$\mathbf{Q}(t)$ …Matrix d. lageabhängigen Kräfte
$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T \geq \mathbf{0}$ …Dämpfungsmatrix
$\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T \geq \mathbf{0}$ …Matrix gyroskopischer Kräfte
$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T \geq \mathbf{0}$ …Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{N} = -\mathbf{N}^T \geq \mathbf{0}$ …Matrix nichtkonservativer Lagekr.
$\mathbf{h}(t)$ …Erregervektor
konservatives System, Energieerhaltung: $\mathbf{D} = \mathbf{N} = \mathbf{h} = \mathbf{0}$