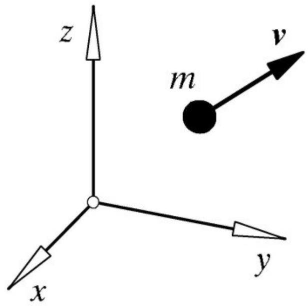
Kinetische Energie



Massenpunkt

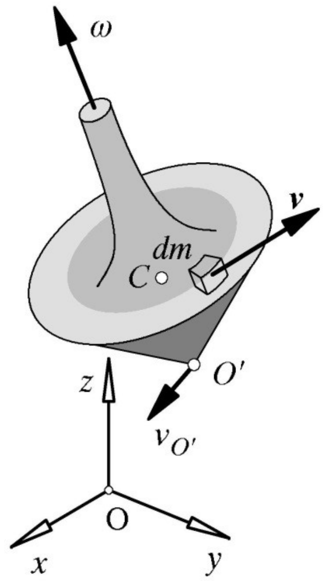
Definition: $$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{m}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{p}$$

Einheit: $1[\mathrm{Nm}] = 1\,[\,\mathrm{J}\,]$

Starrkörper

Massenelement: $$\mathrm{dT} = \frac{1}{2}\mathrm{dm}\,\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{dm}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{v}$$

Starrkörperkinematik



Körper: $$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\,\mathbf{v}_{\mathrm{O'}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{O'}} - \mathrm{m}\,\mathbf{v}_{\mathrm{O'}}^{\mathrm{T}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{C}}' \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{I}_{\mathrm{O'}} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Sonderfälle:

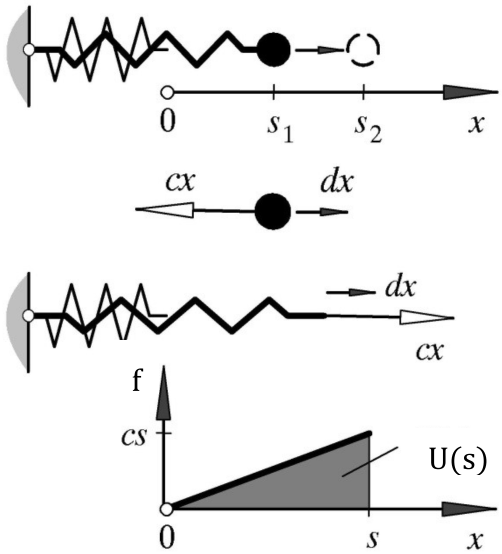
- ♦ $\mathrm{O'} \equiv \mathrm{C}$ Schwerpunkt $\Rightarrow \mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\,\mathbf{v}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{C}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{I}_{\mathrm{C}} \cdot \boldsymbol{\omega}$
- ♦ $\mathrm{O'} \equiv \mathrm{C}$, ebene Bewegung $\Rightarrow \mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\mathrm{v}_{\mathrm{Cx}}^2 + \mathrm{v}_{\mathrm{Cy}}^2\right) + \frac{1}{2}\mathrm{I}_{\mathrm{Cz}}\omega^2$
- ♦ $\mathrm{O'}$ Fixpunkt oder Momentanpol $\Rightarrow \mathrm{T} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{I}_{\mathrm{O'}} \cdot \boldsymbol{\omega}$

Mehrkörpersystem

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\int_{\cup \mathrm{K_i}} \mathrm{v}^2\,\mathrm{dm} = \sum_{\mathrm{i}} \frac{1}{2}\int_{\mathrm{K_i}} \mathrm{v}^2\,\mathrm{dm} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{T_i}$$

kinetische Energie des einzelnen Massenpunkts oder Körpers

Potentielle Energie



◇ lineare Feder

am Körper geleistete Arbeit:

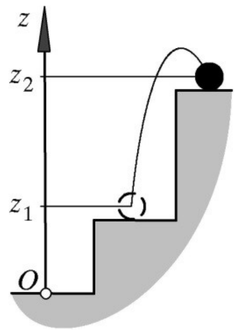
$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} (-cx)dx = -\left(\frac{c\,s_2^2}{2} - \frac{c\,s_1^2}{2}\right)$$

an Feder geleistete Arbeit und damit in Feder gespeicherte Energie:

$$U(s) = \int_0^s cx\,dx = \frac{c\,s^2}{2}$$

⇩

$$W_{12} = -\Delta U = -[U(s_2) - U(s_1)]$$

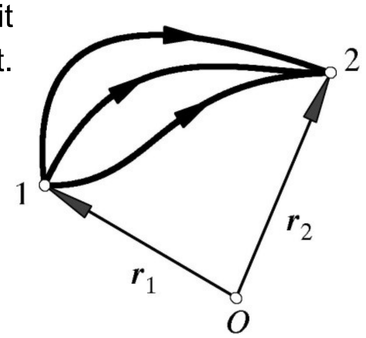


◇ konstante Gewichtskraft

$$W_{12} = \int_1^2 [0 \quad 0 \quad -mg] \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$= -[mg\,z_2 - mg\,z_1] \;\Rightarrow U(z) = mgz$$

◇ allgemeine Definition



Eine Kraft $\mathbf{f}$ ist eine Potentialkraft, wenn die geleistete Arbeit nicht vom Weg, sondern nur von den Endpunkten abhängt. Es existiert dann eine Potentialfunktion $U(\mathbf{r})$, so dass gilt:

$$W_{12} = -\Delta U = -[U(\mathbf{r_2}) - U(\mathbf{r_1})]$$

Bestimmung von $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$:

$$dU = -dW = -\mathbf{f}^T \cdot d\mathbf{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = -f_x\,dx - f_y\,dy - f_z\,dz$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x} = -f_x\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -f_y\,, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = -f_z}$$

$$\text{grad } U = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} = -\mathbf{f}$$