



Beschreibungsformen der Rotation

Beschreibung	Bindungsgleichungen	verallgemeinerte Koordinaten $x \in \mathbb{R}^3$	Zusammenhang zur Drehmatrix
9 Richtungskosinusse $\mathbf{S}(t)$	6 Bindungen $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{E}$	z.B. $S_{11}(t), S_{12}(t), S_{23}(t)$	
4 Drehparameter $\mathbf{d}(t) \varphi(t)$	1 Bindung $\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1$	z.B. $d_1(t), d_2(t), \varphi(t)$	$\mathbf{S} = \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{d}} \sin \varphi + \tilde{\mathbf{d}} \cdot \tilde{\mathbf{d}} (1 - \cos \varphi)$
4 Euler-Parameter $q_0(t) \mathbf{q}(t)$	1 Bindung $q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 1$	z.B. $q_0(t), q_1(t), q_2(t)$	$\mathbf{S} = \mathbf{E} + 2q_0\tilde{\mathbf{q}} + 2\tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}$
3 Rodrigues-Parameter $\mathbf{p}(t)$		$p_1(t), p_2(t), p_3(t)$	$\mathbf{S} = \mathbf{E} + 2 \frac{\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}}{1 + \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{p}}$
3 Elementardrehungen Kardan-Winkel $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ Euler-Winkel $\psi(t), \vartheta(t), \varphi(t)$		$\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ $\psi(t), \vartheta(t), \varphi(t)$	$\mathbf{S} = \boldsymbol{\alpha}_1(t) \cdot \boldsymbol{\beta}_2(t) \cdot \boldsymbol{\gamma}_3(t)$ $\mathbf{S} = \boldsymbol{\psi}_3(t) \cdot \boldsymbol{\vartheta}_1(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}_3(t)$

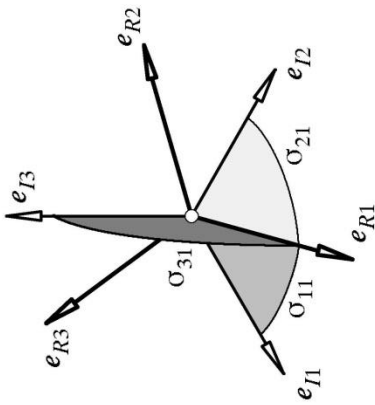
Für jede Beschreibungsform lässt sich eine Darstellung der Drehmatrix in Abhängigkeit eines Lagevektors $\mathbf{x}(t) = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ finden:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{S}(\mathbf{x})$$

Richtungskosinusse S_{ij}

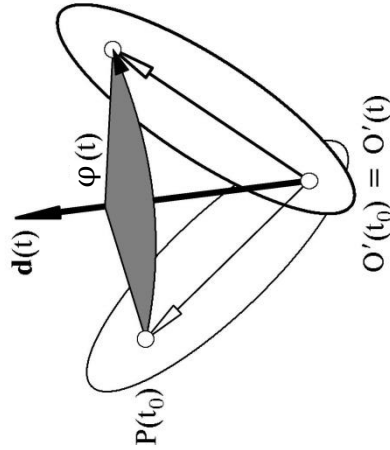
$$S_{ij} = \cos \sigma_{ij} = \cos(\mathbf{e}_{Ri}, \mathbf{e}_{Rj})$$

$$\rightarrow \mathbf{S} = [\mathbf{e}_{R1}|_I \ \mathbf{e}_{R2}|_I \ \mathbf{e}_{R3}|_I]$$



Drehparameter $\mathbf{d}(t)$ $\varphi(t)$

Jede räumliche Drehung lässt sich als Einzeldrehung um eine Drehachse $\mathbf{d}(t)$, $\|\mathbf{d}(t)\| = 1$, mit dem Winkel $\varphi(t)$ beschreiben



Euler-Parameter $\mathbf{q}(t)$ $q_0(t)$

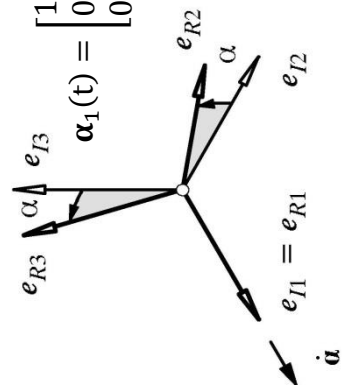
eng verwandt mit den Drehparametern: $\mathbf{q} = \mathbf{d} \sin \frac{\varphi}{2}$, $q_0 = \cos \frac{\varphi}{2}$

Rodrigues-Parameter $\mathbf{p}(t)$

Normierung der Euler-Parameter: $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{q}}{q_0} = \mathbf{d} \tan \frac{\varphi}{2}$

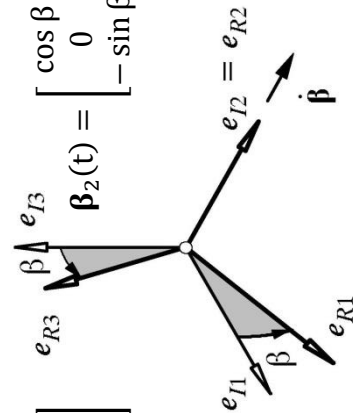
Elementardrehungen um einzelne Koordinatenachsen

Achse \mathbf{e}_1 , Winkel $\alpha(t)$



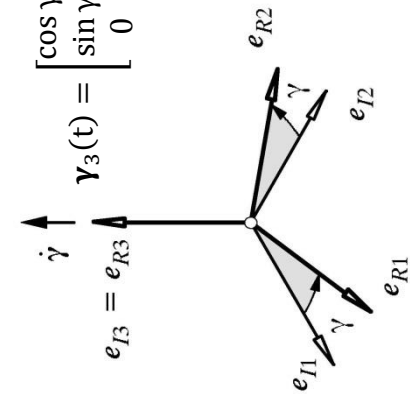
$$\alpha_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Achse \mathbf{e}_2 , Winkel $\beta(t)$



$$\beta_2(t) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Achse \mathbf{e}_3 , Winkel $\gamma(t)$



$$\gamma_3(t) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$