Beschreibungsformen der Rotation

Beschreibung	Bindungsgleichungen	verallgemeinerte Koordinaten $x \in \mathbb{R}^3$	Zusammenhang zur Drehmatrix
9 Richtungskosinusse $\mathbf{S}(t)$	6 Bindungen $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{E}$	z.B. $S_{11}(t)$, $S_{12}(t)$, $S_{23}(t)$	
4 Drehparameter $\mathbf{d}(t)$ $\varphi(t)$	1 Bindung $\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1$	z.B. $d_1(t)$, $d_2(t)$, $\varphi(t)$	$\mathbf{S} = \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{d}} \sin\varphi + \tilde{\mathbf{d}} \cdot \tilde{\mathbf{d}} (1 - \cos\varphi)$
4 Euler-Parameter $q_0(t)$ $\mathbf{q}(t)$	1 Bindung $q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 1$	z.B. $q_0(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$	$\mathbf{S} = \mathbf{E} + 2q_0\tilde{\mathbf{q}} + 2\tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}$
3 Rodrigues−Parameter $\mathbf{p}(t)$		$p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$	$\mathbf{S} = \mathbf{E} + 2\dfrac{\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}}{1 + \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{p}}$
3 Elementardrehungen Kardan−Winkel $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ Euler−Winkel $\psi(t)$, $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$		$\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ $\psi(t)$, $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$	$\mathbf{S} = \boldsymbol{\alpha}_1(t) \cdot \boldsymbol{\beta}_2(t) \cdot \boldsymbol{\gamma}_3(t)$ $\mathbf{S} = \boldsymbol{\psi}_3(t) \cdot \boldsymbol{\vartheta}_1(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}_3(t)$

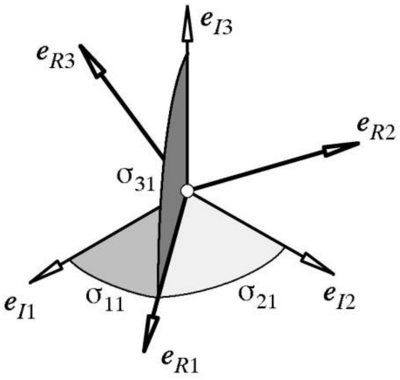
Für jede Beschreibungsform lässt sich eine Darstellung der Drehmatrix in Abhängigkeit eines Lagevektors $\mathbf{x}(t) = [x_1\ x_2\ x_3]$ finden:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}\big(\mathbf{x}(t)\big) = \mathbf{S}(\mathbf{x})$$

Richtungskosinusse S_{ij}

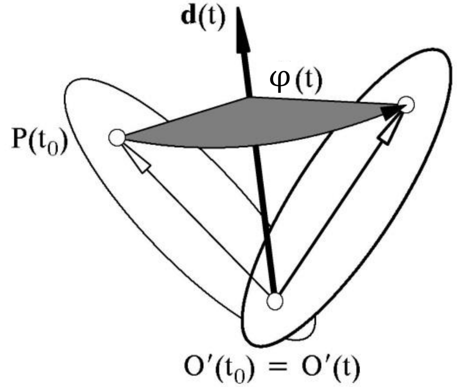
$$S_{ij} = \cos\sigma_{ij} = \cos(\mathbf{e}_{Ii}, \mathbf{e}_{Rj})$$

$$\rightarrow \mathbf{S} = [\, \mathbf{e}_{R1}|_I \;\; \mathbf{e}_{R2}|_I \;\; \mathbf{e}_{R3}|_I \,]$$



Drehparameter $\mathbf{d}(t)\ \varphi(t)$

Jede räumliche Drehung lässt sich als Einzeldrehung um eine Drehachse $\mathbf{d}(t)$, $\|\mathbf{d}(t)\| = 1$, mit dem Winkel $\varphi(t)$ beschreiben



Euler-Parameter $\mathbf{q}(t)\ q_0(t)$

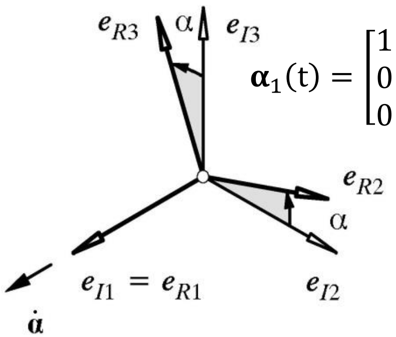
eng verwandt mit den Drehparametern: $\mathbf{q} = \mathbf{d}\sin\frac{\varphi}{2}, q_0 = \cos\frac{\varphi}{2}$

Rodrigues−Parameter $\mathbf{p}(t)$

Normierung der Euler-Parameter: $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{q}}{q_0} = \mathbf{d}\tan\frac{\varphi}{2}$

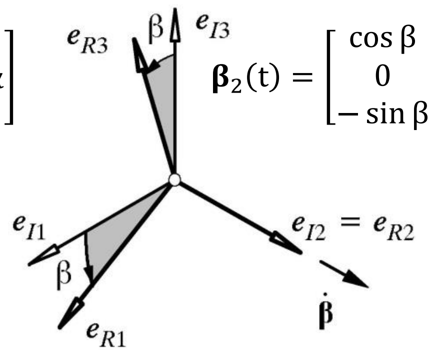
Elementardrehungen um einzelne Koordinatenachsen

Achse $\mathbf{e}_1$, Winkel $\alpha(t)$



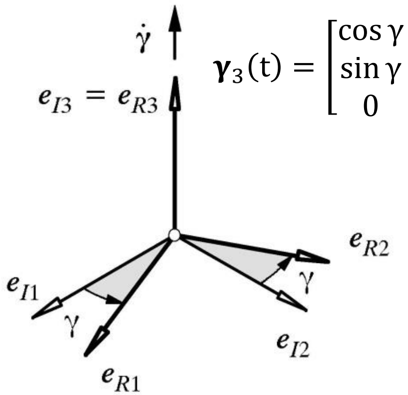
$$\boldsymbol{\alpha}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Achse $\mathbf{e}_2$, Winkel $\beta(t)$



$$\boldsymbol{\beta}_2(t) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Achse $\mathbf{e}_3$, Winkel $\gamma(t)$



$$\boldsymbol{\gamma}_3(t) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$