Mathematische Hilfsmittel

Matrizenalgebra und Matrizenanalysis

Skalar $\mu \in \mathbb{R}$

Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $x_i \in \mathbb{R}$

Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ml} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$, $A_{ij} \in \mathbb{R}$

Elementare Operationen

Operation	Schreibweise	Koordinaten	Abbildung
Addition	$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$	$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$	$\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$
Multiplikation mit Skalar	$\mathbf{C} = \mu\,\mathbf{A}$	$C_{ij} = \mu\, A_{ij}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$
Transponieren	$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T$	$C_{ij} = A_{ji}$	$\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$
Differentiation	$\mathbf{C} = \frac{d}{dt}\mathbf{A}$ $\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}$	$C_{ij} = \frac{d}{dt} A_{ij}$ $C_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$	$\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$
Matrizenmultiplikation	$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$y_i = \sum_k A_{ik}\, x_k$ $C_{ij} = \sum_k A_{ik}\, B_{kj}$	$\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{n\times p} \to \mathbb{R}^{m\times p}$
Inneres Produkt (Skalarprodukt)	$\mu = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$	$\mu = \sum_k x_k\, y_k$	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Äußeres Produkt (Dyadisches Produkt)	$\mathbf{A} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T$	$A_{ij} = x_i\, y_j$	$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$

Rechenregeln:

Addition:	$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$
	$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$
Multiplikation mit Skalar:	$\mu(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mu\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot(\mu\mathbf{B})$
	$\mu(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mu\mathbf{A}+\mu\mathbf{B}$
Transposition:	$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$
	$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$
	$(\mu\mathbf{A})^{\mathrm{T}}=\mu\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
	$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
Differentiation:	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{B}$
	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{B}\right)$
	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(\mathbf{y})=\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{y}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$
Matrizenmultiplikation:	$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$
	$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$
	aber i.a. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$
Skalarprodukt:	$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x}$
	$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x}\geq 0\quad\forall\mathbf{x}\quad,\qquad\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{x}=0\Leftrightarrow\ \mathbf{x}=0$
	$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{y}=0\Leftrightarrow\mathbf{x},\mathbf{y}$ orthogonal

Quadratische Matrizen:

Einheitsmatrix	$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}$
Diagonalmatrix	$\mathbf{D}=\mathrm{diag}\{\mathrm{d_i}\}=\begin{bmatrix}\mathrm{d}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{d_n}\end{bmatrix}$
Inverse Matrix	$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\mathrm{adj}\mathbf{A}$
	$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$
	$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$

Symmetrische Matrix $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$

Schiefsymmetrische Matrix $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$

Zerlegung $$\mathbf{A} = \underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\mathbf{B} = \mathbf{B}^T} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{\mathbf{C} = -\mathbf{C}^T}$$

Schiefsymmetrische 3 × 3 Matrix $$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

↕ Rösselsprung

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} \mathrel{\widehat{=}} \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

$\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{a} \quad \widehat{=} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

$\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^T - (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{E}$

$(\widetilde{\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^T - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T$

Symmetrische, positiv definite Matrix: $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} > 0 \;\forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

⇔ Hauptabschnittsdeterminante

$H_\alpha > 0, \;\; \alpha = 1(1)n$

⇔ Eigenwerte $\lambda_\alpha > 0, \;\; \alpha = 1(1)n$

Symmetrische, positiv semidefinite Matrix: $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \geq 0 \;\forall\, \mathbf{x}$

⇔ Eigenwerte $\lambda_\alpha \geq 0, \;\; \alpha = 1(1)n$

Symmetrische, negativ definite Matrix: $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} < 0 \;\forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

⇔ Hauptabschnittsdeterminante

$(-1)^\alpha H_\alpha > 0, \;\; \alpha = 1(1)n$

⇔ Eigenwerte $\lambda_\alpha < 0, \;\; \alpha = 1(1)n$

Symmetrische, negativ semidefinite Matrix: $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq 0 \;\forall\, \mathbf{x}$

⇔ Eigenwerte $\lambda_\alpha \leq 0, \;\; \alpha = 1(1)n$

Orthogonale Matrix $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T, \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$

Determinante $$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} A_{ik} B_{ik} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ik}$$

Adjungierte Matrix $$\operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix}^T$$

Adjunkte eines Elementes einer Matrix

$$B_{ik} = (-1)^{i+k} \det \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ A_{i-1,1} & & & & & A_{i-1,n} \\ A_{i+1,1} & & & & & A_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Komplexe Zahlen

$u = a + ib,\qquad v = c + id,\qquad i^2 = -1$

Konjugiert komplexe Zahl: $u^* = a - ib,\quad v^* = c - id$

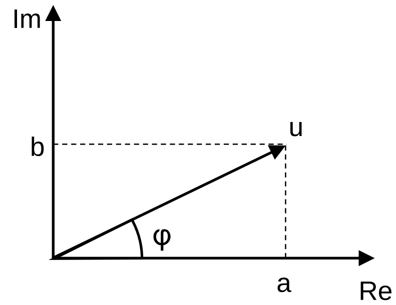
Polardarstellung

$u = r\, e^{i\varphi}\qquad u^* = r\, e^{-i\varphi}$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}\qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}$

$a = r\cos\varphi\qquad b = r\sin\varphi$

$v = R\, e^{i\psi}$



Regeln

$u \pm v = (a \pm c) + i(b \pm d)$

$u\, v = (a\, c - b\, d) + i(a\, d + b\, c) = r\, R\, e^{i(\varphi+\psi)}$

Äquivalente Darstellung harmonischer Funktionen $h(t) \in R$

$h(t) = h_0\, e^{i\omega t} + h_0^*\, e^{-i\omega t}$

> *Euler-Formel*: $e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i \sin\omega t$
>
> $h^c = h_0 + h_0^*$ $\qquad h_0 = \frac{1}{2}(h^c - i h^s)$
>
> $h^s = i(h_0 - h_0^*)$

$= h^c\, \cos\omega t + h^s\, \sin\omega t$

> *Trigonometrie*: $\cos(\omega t - \varphi) = \cos\varphi\, \cos\omega t + \sin\varphi\, \sin\omega t$
>
> $a = \sqrt{(h^c)^2 + (h^s)^2}$ $\qquad h^c = a\, \cos\varphi$
>
> $\varphi = \arctan\frac{h^s}{h^c}$ $\qquad h^s = a\, \sin\varphi$

$= a\, \cos(\omega t - \varphi)$