



Flexible Mehrkörpersysteme

apl. Prof. Dr.-Ing. J. Fehr

Johannes Rettberg, M.Sc. & Philipp Rodegast, M.Sc.

- Vorlesung:** Die Vorlesung wird für die Studierende des Spezialisierungsfachs Technische Dynamik (mach, tema, fmt, mecha, kyb) und des Nebenfaches Mechanik (math) sowie für SimTech Promotionsstudierende angeboten.
- Übungen:** Die Vorlesung wird durch Vortragsübungen ergänzt, die unmittelbar auf den Vorlesungsstoff abgestimmt sind.
- Praktika:** Als Ergänzung zur Vorlesung werden drei Übungsprojekte angeboten. Diese können im Rahmen des Praktikums Technische Dynamik oder als APMB-Versuche anerkannt werden.
- Ort/Zeit:** Mittwoch, 11:30-13:00 Uhr, **V9.41**
Freitag, 08:00-09:30 Uhr, **V7.04**
- Dozent:** Die Vorlesung und Übungen werden von apl. Prof. Dr.-Ing. J. Fehr gehalten, die Praktika werden von Johannes Rettberg und Philipp Rodegast vorgestellt und betreut.
- Sprechstunden:** Nach den Vorlesungsveranstaltungen wird Ihnen die Möglichkeit gegeben, sich mit Fragen an Prof. Fehr, Johannes Rettberg und Philipp Rodegast zu wenden. Zusätzlich können Sie sich mit Fragen gerne per [E-Mail](mailto:) oder am Institut (PWR9, Raum 4.155, Tel.: 685-66396) an Herrn Rettberg bzw. Institut (PWR9, Raum 4.114, Tel.: 685-66530) an Herrn Rodegast wenden. Bei größerem Bedarf wird eine gesonderte Onlinesprechstunde angekündigt.
- Institut:** Die Räume des Instituts für Technische und Numerische Mechanik befinden sich im Ingenieurwissenschaftlichen Zentrum (IWZ), Pfaffenwaldring 9, 3. und 4.Stock.
- www:** <https://www.itm.uni-stuttgart.de>
- Aufgaben:** In den Vortragsübungen werden die Arbeitsblätter vorgerechnet. Die Arbeitsblätter finden Sie in den Unterlagen zur Vorlesung.
- Unterlagen im Internet:** Organisatorische Hinweise sowie aktuelle Unterlagen finden Sie im Internet unter <https://www.itm.uni-stuttgart.de/lehre/lehveranstaltungen/flexible-mehrkoerpersysteme/>
- ILIAS:** Bitte melden Sie sich zur C@mpus Lehrveranstaltung an, damit wir Sie in Notfällen kontaktieren können und Sie Zugang zum ILIAS Kurs haben. In ILIAS finden Sie Zusatzmaterialien und können Ihre Abgaben der Praktika einreichen.
- Prüfung:** Die Prüfung findet schriftlich (eventuell mündlich) statt. Der Termin der Prüfung steht noch nicht fest und wird im Laufe des Semesters hier in der Vorlesung bekannt gegeben.
- Prüfungsanmeldung:** Die Anmeldung erfolgt immer über das Prüfungsamt.
- Hilfsmittel:** Bei einer schriftlichen Prüfung sind als Hilfsmittel ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN-A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen. Bei einer mündlichen Prüfung sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Flexible Mehrkörpersysteme

Rechnergestützte Methoden zur Untersuchung von technischen Systemen werden klassischerweise in vielen Bereichen von Forschung und Entwicklung eingesetzt, wodurch die Anzahl kostspieliger Experimente stark reduziert werden kann. Zusätzlich werden heutzutage in immer mehr Bereichen sogenannte *Digital Twins* von realen Produkte eingesetzt, die z.B. neuartige Dienstleistungen, wie *Predictive Maintenance*, ermöglichen.

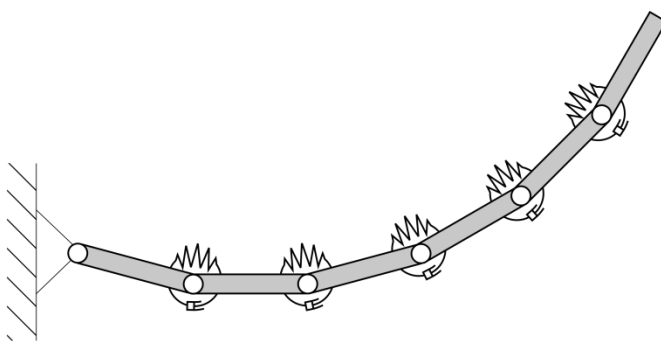
Die Methode der Mehrkörpersysteme (MKS) dient der Modellierung mechanischer Systeme bei denen massenbehaftete Körper große Verschiebungen und Verdrehungen ausführen. Die MKS werden dabei in Analyse, Simulation und Optimierung des Bewegungsverhaltens und der auftretenden Belastungen verwendet. Des Weiteren finden MKS Verwendung beim modellbasierten Reglerentwurf. Typische Anwendungen finden sich in der Maschinen- und Fahrzeugdynamik, Robotik, Mechatronik und Biomechanik.

Sind die Deformationen der Bauteile vernachlässigbar klein, so werden die Bauteile als Starrkörper modelliert. Ein Beispiel stellt hier der klassische Industrieroboter da.

Mit der Methode der flexiblen Mehrkörpersysteme (FMKS) können mechanische Systeme untersucht werden, die neben großen nichtlinearen Bewegungen auch nicht vernachlässigbare elastische Bauteilverformungen erfahren. Diese elastischen Verformungen sind in den meisten typischen Anwendungsfällen jedoch als klein anzusehen. Beispiele sind moderne Leichtbaukonstruktionen im Fahrzeugbau und Robotik, Maschinen mit hohen Geschwindigkeiten und Präzisionsanforderungen, Festplatten, Windkraftanlagen, ...

Die Modellierung flexibler Mehrkörpersysteme lässt sich in drei Gruppen einteilen:

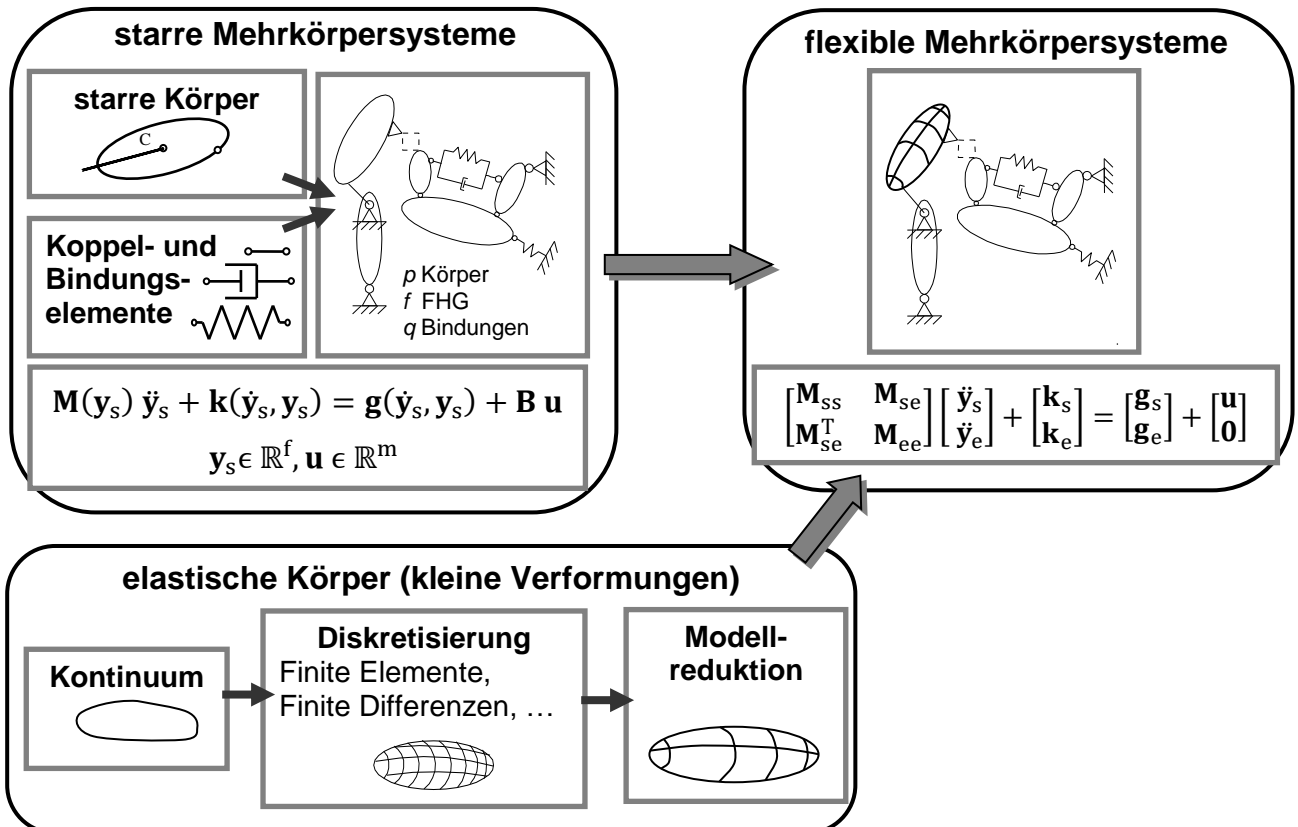
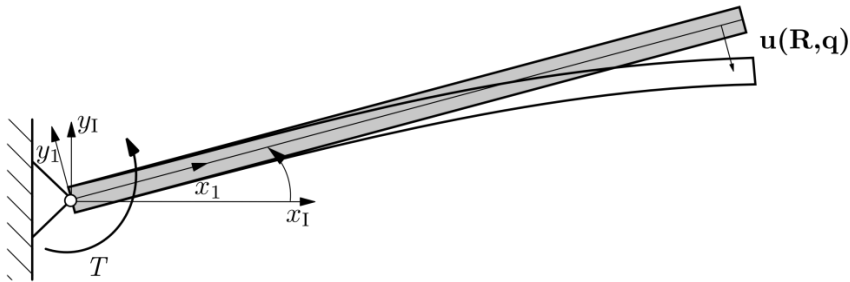
1. Finite Segmente Ansatz



2. Nichtlineare Finite Elemente Ansätze



3. Methode des mitbewegten Referenzsystems (Floating Frame of Reference)





Inhaltsübersicht Vorlesung Flexible Mehrkörpersysteme

- Stand 25.02.2019 -

1. Einleitung

- 1.1 Literatur
- 1.2 Mathematische Grundlagen

2. Grundlagen der Mehrkörperdynamik

- 2.1 Grundgleichungen starrer Mehrkörpersysteme
 - 2.1.1 Impuls und Drallsatz
 - 2.1.2 Prinzip der Dynamik
 - 2.1.3 Prinzip von D'Alembert in Lagrange'scher Fassung
 - 2.1.4 Prinzip von Jourdain
- 2.2 Holonome Mehrkörpersysteme mit Baumstruktur
- 2.3 Verallgemeinerte Geschwindigkeiten bei holonomen Mehrkörpersystemen
- 2.4 Holonome Mehrkörpersysteme mit kinematischen Schleifen
- 2.5 Mehrkörpersysteme in DAE-Form
- 2.6 Nichtholonome Mehrkörpersysteme

3. Grundlagen zur Beschreibung eines elastischen Körpers

- 3.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen
- 3.2 Finite Elemente Ansatz

4. Grundlagen Flexible Mehrkörpersysteme

- 4.1 Klassifizierung von elastischen Mehrkörpersystemen
- 4.2 Formulierung mittels nichtlinearer FEM: „Absolute Nodal Coordinate Formulation (ANCF)“
- 4.3 Ansatz des mitbewegten Referenzsystems
 - 4.3.1 Kinematik eines elastischen Körpers
 - 4.3.2 Diskretisierung eines elastischen Körpers
 - 4.3.3 Kinetik eines freien elastischen Körpers
 - 4.3.4 Wahl der Ansatzfunktionen und des Referenzsystems
 - 4.3.5 Lineare Modellreduktion zur Gewinnung der Ansatzfunktionen
 - 4.3.6 Geometrische Steifigkeiten
 - 4.3.7 Standard Input Data
 - 4.3.8 Spannungsberechnung
- 4.4 Absolute Coordinate Formulation (ACF)



5. Beschreibung und Implementierung flexibler Mehrkörpersysteme

- 5.1 DAE-Formulierung
- 5.2 ODE-Formulierung
- 5.3 Programmtechnische Umsetzung
- 5.4 Einführung in das MKS-Programm Neweul-M2

6. Ausgewählte Probleme bei Flexiblen Mehrkörpersystemen

- 6.1 Regelung starrer und flexibler Mehrkörpersysteme
 - 6.1.1 Inverse Kinematik und Dynamik starrer Mehrkörpersysteme
 - 6.1.2 Trajektorienregelung flexibler Mehrkörpersysteme
 - 6.1.3 Servo-Bindungen
- 6.2 Kontaktprobleme in Mehrkörpersystemen
 - 6.2.1 Kontinuierliche Kontaktmodelle
 - 6.2.2 Kontakt flexibler Körper
 - 6.2.3 Diskrete-Elemente-Simulationen



Literatur

1. Bauchau, O.A.: Flexible Multibody Dynamics (Solid Mechanics and Its Application). Springer, Dordrecht, 2011, 1. Auflage.
2. Becker, E., Bürger, W.: Kontinuumsmechanik. Eine Einführung in die Grundlagen und einfache Anwendungen, Teubner, 1975.
3. Bestle, D.: Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen. Springer, Berlin, 1994.
4. Bremer, H., Pfeiffer, F.: Elastische Mehrkörpersysteme. Stuttgart, Teubner, 1992.
5. Cardona, A., Géradin, M.: Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach, John Wiley & Sons, West Sussex, 2001.
6. Cook, R.D., Malkus, D.S.: Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, New York, 2002.
7. Eberhard, P.; Kontaktuntersuchungen durch hybride Mehrkörpersysteme / Finite Elemente Simulationen. Aachen, Shaker, 2000.
8. Eich-Soellner, E., Führer, C.: Numerical Methods in Multibody Dynamics. Teubner, Stuttgart, 1998.
9. Gallagher, R.: Finite-Elemente-Analysis. S. 108-113, Springer, 1976.
10. Haug, E.J.: Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems. Vol. I: Basic Methods. Boston, Allyn & Bacon, 1989.
11. Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y.: Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA. Wiley, Chichester, 2009.
12. Murray, R., Li, Z., Sastry, S.: A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation. CRC Press, 1994.
13. Schiehlen, W., Eberhard, P.: Technische Dynamik. 5. Aufl., Teubner, Wiesbaden, 2017.
14. Schiehlen, W., Ed.: Multibody Systems Handbook. Springer, Berlin, 1990.
15. Schiehlen, W., Guse, N., Seifried, R.: Multibody Dynamics in Computational Mechanics and Engineering Applications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195, No. 41-43, 2006, pp. 5509-5522.
16. Schwertassek, R., Wallrapp, O.: Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme. Braunschweig, Vieweg + Teubner, 2014.



17. Seifried, R.: Dynamics of Underactuated Multibody Systems - Modeling, Control and Optimal Design, Springer, Berlin, 2013.
18. Shabana, A.A.: Computational Continuum Mechanics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
19. Shabana, A.A.: Dynamics of Multibody Systems. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013, 4. Auflage.
20. Shabana, A.A.: Flexible Dynamics: Review of Past and Recent Developments. Multibody System Dynamics, Vol. 1, 1997, pp. 189-222.
21. Simeon, B.: Computational Flexible Multibody Dynamics: A Differential-Algebraic Approach, Springer, Berlin, 2013.
22. Spong, M.W., Hutchinson, S., Vidyasagar, M.: Robot Modeling and Control. Hoboken, Wiley, 2006.
23. Wallrapp, O.: Advanced Multibody System Dynamics. S. 445-450, Kluwer Academic Publishers, 1993.
24. Woernle, C.: Mehrkörpersysteme – Eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper. Springer, 2016, 2. Auflage.
25. Wriggers, P.: Nichtlineare Finite-Elemente-Methoden. Springer, 2001.
26. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.: The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2014, 7. Auflage.



Mathematische Grundlagen

Matrizenalgebra und Matrizenanalysis

Skalar $\mu \in \mathbb{R}$

Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $x_i \in \mathbb{R}$

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$, $y_i \in \mathbb{R}$

Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$, $A_{ij} \in \mathbb{R}$

Elementare Operationen

Operation	Schreibweise	Komponenten	Abbildungung
Addition	$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$	$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$	$\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$
Multiplikation mit Skalar	$\mathbf{C} = \mu \mathbf{A}$	$C_{ij} = \mu A_{ij}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$
Transponieren	$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T$	$C_{ij} = A_{ji}$	$\mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$
Differentiation	$\mathbf{C} = \frac{d}{dt} \mathbf{A}$	$C_{ij} = \frac{d}{dt} A_{ij}$	$\mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$
	$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}$	$C_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$
Matrizenmultiplikation	$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$	$y_i = \sum_k A_{ik} x_k$	$\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
	$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$	$\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$
Inneres Produkt (Skalarprodukt)	$\mu = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$	$\mu = \sum_k x_k z_k$	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
Äußeres Produkt (dyadisches Produkt)	$\mathbf{A} = \mathbf{x} \mathbf{y}$	$A_{ij} = x_i y_j$	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$



Rechenregeln

Addition: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Multiplikation mit Skalar: $\mu(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mu\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\mu\mathbf{B})$

$$\mu(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mu\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}$$

Transposition:

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(\mu \mathbf{A})^T = \mu \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

Differentiation:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d}{dt}\mathbf{A} + \frac{d}{dt}\mathbf{B}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \left(\frac{d}{dt}\mathbf{B}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(\mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{dt}$$

Matrizenmultiplikation:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

aber i.A. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Skalarprodukt:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ orthogonal}$$

Quadratische Matrizen

Einheitsmatrix

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{d_i\} = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$$

Inverse Matrix

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Symmetrische Matrix

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$$

Schiefsymmetrische Matrix $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$

Zerlegung

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\mathbf{B} = \mathbf{B}^T} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{\mathbf{C} = -\mathbf{C}^T}$$



Schiefsymmetrische 3×3 Matrix

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{E}$$

$$(\tilde{\tilde{\mathbf{a}}}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a} - \mathbf{a}\mathbf{b}$$

↕ Rösselsprung

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Symmetrische, positiv definite Matrix:

↔ Hauptabschnittsdeterminanten

↔ Eigenwerte

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

$$H_\alpha > 0, \quad \alpha = 1(1)n$$

$$\lambda_\alpha > 0, \quad \alpha = 1(1)n$$

Symmetrische, positiv semidefinite Matrix:

↔ Hauptabschnittsdeterminanten

↔ Eigenwerte

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}$$

$$H_\alpha \geq 0, \quad \alpha = 1(1)n$$

$$\lambda_\alpha \geq 0, \quad \alpha = 1(1)n$$

Orthogonale Matrix

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Determinante

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n A_{ik} B_{ik} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{ik}$$

Adjungierte Matrix

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix}^T$$

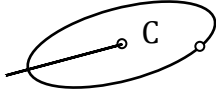


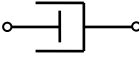
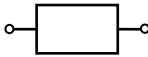

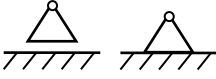

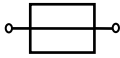
Adjunkte eines Elementes einer Matrix

$$B_{ik} = (-1)^{i+k} \det \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,k-1} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ A_{i-1,1} & & & & & A_{i-1,n} \\ A_{i+1,1} & & & & & A_{i+1,n} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{n,k-1} & A_{n,k+1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$



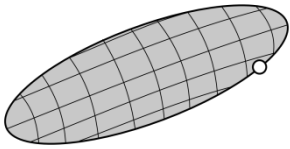
Modellelemente

Mehrkörpersysteme (starr)

Idealisierungen	<ul style="list-style-type: none">starre, massebehaftete Körper (Trägheit)Koordinatensysteme/Marker (Punkt auf Körper, z.B. zur Verknüpfung von Körpern, Angriffspunkte für Einzelkräfte)masselose Koppellemente (bekannte Kraftgesetze die eingeprägte Kräfte und Momente erzeugen)masselose Bindungselemente (reibunglos in freie Bewegungsrichtung, starr in sperrende Richtung, erzeugen Reaktionskräfte und -momente)		
Symbole	Körper		
	starrer Körper		Masse m Trägheitstensor I
	Massenpunkt		Masse m
	Koppelemente		
	Feder		Steifigkeit c ungespannte Länge l_0
	Dämpfer		Dämpfung d
Kraftstellglied		Kraftsteuerung $F(t)$	
Bindungselemente			
Stab			
Gelenklager			
feste Einspannung			
Lagestellglied		Bewegungssteuerung $l(t)$	



Flexible Mehrkörpersysteme

Idealisierungen	<ul style="list-style-type: none">▪ starre, massebehaftete Körper (Trägheit)▪ massebehaftete Körper mit festgelegten Verformungseigenschaften (Trägheit und Steifigkeit)▪ Koordinatensysteme/Marker (Punkt auf Körper, z.B. zur Verknüpfung von Körpern, Angriffspunkte für Einzelkräfte, Beschreibung der Verformung)▪ masselose Koppellemente (bekannte Kraftgesetze die eingeprägte Kräfte und Momente erzeugen)▪ masselose Bindungselemente (reibunglos in freie Bewegungsrichtung, starr in sperrende Richtung, erzeugen Reaktionskräfte und -momente)		
Zusätzliche Symbole	elastischer Körper		Materialkennwerte E , ν Dichte ρ Körpergeometrie



Klassifizierung von Mehrkörpersystemen

Kriterium		
Topologie	Baumstruktur Schleifenstruktur	
Bewegungsbeschränkung	holonom nichtholonom	geometrische oder integrierbare kinematische Bindung → reduziert Freiheitsgrad der Lage und Geschwindigkeit nicht integrierbare kinematische Bindung → reduziert nur Freiheitsgrad der Geschwindigkeit

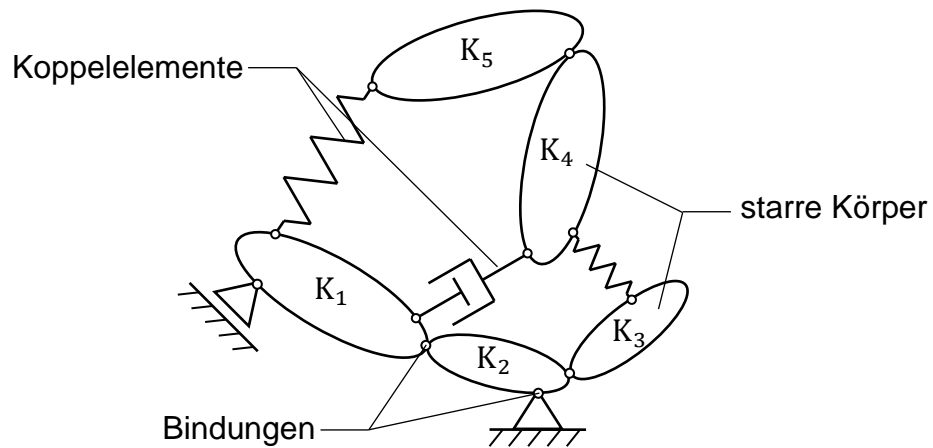


Kraftwirkung	zweiseitige Bindung	Wirkung in beide Richtungen (Gleichungsbedingung)
Zeitabhängigkeit	einseitige Bindung	Wirkung nur in eine Richtung (Ungleichungsbedingung)
	skleronome Bindung	nicht explizit zeitabhängig
	rheonome Bindung	explizit zeitabhängig

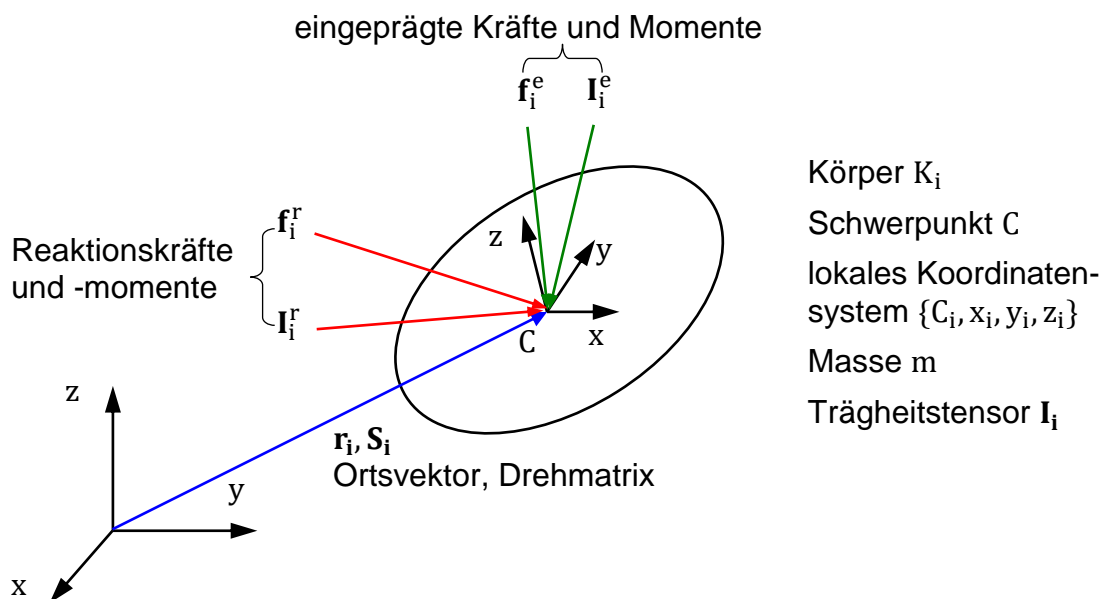


Impuls- und Drallsatz

Mehrkörpersystem mit p starren Körpern K_i mit $i = 1(1)p$.



freischneiden

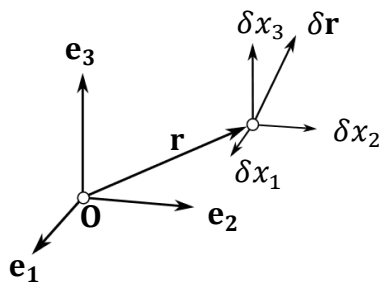


Virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte

Die virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte verschwindet, da Reaktionskräfte orthogonal zu den freien Bewegungsrichtungen stehen (Orthogonalitätsbedingung). Im Folgenden sind Beispiele zur Berechnung der Reaktionskräfte \mathbf{f}^r , der virtuellen Verrückungen $\delta\mathbf{r}$ und den jeweils geltenden Orthogonalitätsbedingungen für verschiedene mechanische Problemstellungen dargestellt.

Beispiele für die Berechnung der virtuellen Arbeit der Reaktionskräfte ...

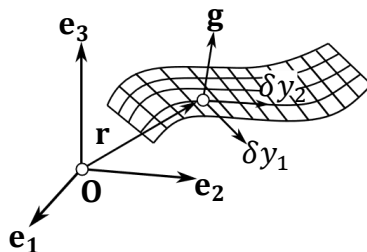
a) eines freien Punktes



$$\mathbf{f}^r = \mathbf{0}$$

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{e}_1\delta x_1 + \mathbf{e}_2\delta x_2 + \mathbf{e}_3\delta x_3$$

b) eines einfach gebundenen Punktes



$$\mathbf{f}^r = \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}$$

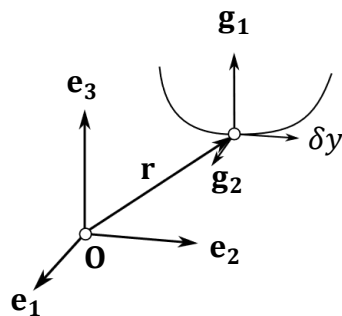
$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{J}_1\delta y_1 + \mathbf{J}_2\delta y_2$$

$$\mathbf{f}^r \cdot \delta\mathbf{r} = 0$$

$$\mathbf{J}_1^T \cdot \mathbf{F} = 0, \mathbf{J}_2^T \cdot \mathbf{F} = 0$$

(Orthogonalitätsbedingung)

c) eines zweifach gebundenen Punktes



$$\mathbf{f}^r = \mathbf{F}_1\mathbf{g}_1 + \mathbf{F}_2\mathbf{g}_2$$

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{J}\delta y$$

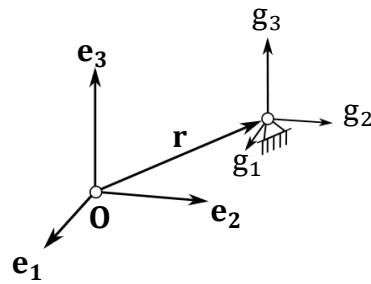
$$\mathbf{f}^r \cdot \delta\mathbf{r} = 0$$

$$\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F}_1 = 0, \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F}_2 = 0$$

(Orthogonalitätsbedingung)



d) eines statisch bestimmt gelagerten Punktes



$$\mathbf{f}^r = \mathbf{e}_1 g_1 + \mathbf{e}_2 g_2 + \mathbf{e}_3 g_3$$

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{f}^r \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

(Orthogonalitätsbedingung)

Literatur

- [1] W. Schiehlen, P. Eberhard. *Technische Dynamik*. Springer, Wiesbaden, 2017.



Virtuelle Verrückungen

Virtuelle Verschiebungen und Verdrehungen sind gedachte, infinitesimale mit den Bindungen verträgliche Lageänderungen (Variation) bei festgehaltener Zeit:

$$\delta t = 0, \quad \delta \mathbf{r}_i \neq \mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{s}_i \neq \mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{v}_i = \delta \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{0}$$

Die Rechenregeln des δ -Operators entsprechen denen des Differentialoperators bei festgehaltener Zeit t :

$$\delta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{y}$$

$$\delta(c \mathbf{x}) = c \delta \mathbf{x}, \quad c = \text{const.}$$

$$\delta \mathbf{r}(\mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y}$$

Satz 2.1: Unabhängige Variation

Es seien $\mathbf{c}, \delta \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

Dann gilt $\mathbf{c} \cdot \delta \mathbf{y} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{c} = \mathbf{0}$

Beweis:



Satz 2.2: Abhängige Variation (Lagrange Multiplikatoren)

Es seien $\mathbf{c}, \delta \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Falls $\mathbf{c} \cdot \delta \mathbf{y} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{y} : \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{y} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \exists \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m, (\mathbf{c} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{A}) \cdot \delta \mathbf{y} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{y}$

Beweis:



Holonome MKS in Baumstruktur

Für MKS mit Baumstruktur lässt sich immer eine Beschreibung mit minimalen verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^f$ finden. Dabei ist f die Anzahl der Freiheitsgrade und p die Anzahl der Körper des Systems.

Kinematik

Position und Orientierung

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{y}, t) \quad i = 1(1)p$$

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i(\mathbf{y}, t)$$

Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{y}, t)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \dot{\mathbf{S}}_i = \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial t} = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{y}, t)$$

Beschleunigungen

$$\mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{J}_{Ti} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{J}}_{Ti} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_i = \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{a}}_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{J}_{Ri} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{J}}_{Ri} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$$

Virtuelle Verrückungen

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} = \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) \cdot \delta \mathbf{y}$$

$$\delta \mathbf{S}_i = \frac{\partial \mathbf{S}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) \cdot \delta \mathbf{y}$$

d'Alembertsche Prinzip

$$\sum_{i=1}^p [\delta \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{m}_i \mathbf{a}_i - \mathbf{f}_i^e) + \delta \mathbf{S}_i \cdot (\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{I}_i^e)] = 0$$



Durch einsetzen der virtuellen Verrückungen in das d'Alembertsche Prinzip folgt

$$\delta \mathbf{y} \cdot \sum_{i=1}^p [\mathbf{J}_{Ti}^T \cdot (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{f}_i^e) + \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot (\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{I}_i^e)] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{y}$$

Mit Satz 2.1 ergibt sich

$$\sum_{i=1}^p [\mathbf{J}_{Ti}^T \cdot (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{f}_i^e) + \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot (\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{I}_i^e)] = 0$$

Das Einarbeiten der Kinematik führt zu

$$\sum_{i=1}^p [\mathbf{J}_{Ti}^T \cdot m_i \cdot \mathbf{J}_{Ti} + \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{J}_{Ri}] \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \sum_{i=1}^p [\mathbf{J}_{Ti}^T \cdot m_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_i + \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot \mathbf{I}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i + \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i] =$$

$$\sum_{i=1}^p [\mathbf{J}_{Ti}^T \cdot \mathbf{f}_i^e + \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot \mathbf{I}_i^e]$$

Bewegungsgleichungen für holonome MKS

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$$



Kurzeinführung in MATLAB mit Symbolic Toolbox

MATLAB

MATLAB ist ein kommerzielles Numerik-Programmpaket, das Studenten der Universität Stuttgart zur Verfügung steht:

<https://www.stud.uni-stuttgart.de/dienste/software/matlab.html>

MATLAB verwendet eine numerische Darstellung von Vektoren und Matrizen und erlaubt eine einfache Programmierung von Vektor/Matrixoperationen und stellt eine Vielzahl von Methoden zur Systemanalyse zur Verfügung. Viele so genannte Toolboxen sind verfügbar, welche die Funktionalität von MATLAB erweitern.

Die Befehle können direkt in dem MATLAB-Fenster eingegeben und ausgeführt werden. Alternativ können die Befehle auch in einer Textdatei `<name>.m` zusammengefasst werden. Dieses so genannte m-file wird durch Eingabe von `<name>` in dem MATLAB-Fenster geladen und ausgeführt.

<code>helpdesk</code>	startet die Online-Hilfe
<code>a = [3 -4 5]</code>	definiert einen Zeilenvektor
<code>b = [3 -4 5]'</code>	definiert einen Spaltenvektor
<code>A = [1 2 4; 2 13 23; 4 23 77]</code>	definiert eine Matrix
<code>A'</code>	Transponierte der Matrix A
<code>A(2,3)</code>	Matrizelement A_{23}
<code>A(:,3)</code>	3. Spalte der Matrix A
<code>A(1,:)</code>	1. Zeile der Matrix A
<code>zeros(n,m)</code>	definiert eine Nullmatrix
<code>ones(n,m)</code>	definiert eine Matrix mit Einsen
<code>diag([1 2 3])</code>	definiert eine Diagonalmatrix
<code>c = A * b</code>	Matrix-Vektor Multiplikation
<code>c = A \ b</code>	löst ein lineares Gleichungssystem
<code>inv(A)</code>	Inverse einer Matrix
<code>[EV, ew] = eig(A)</code>	Matrix EV der Eigenvektoren, Vektor ew der Eigenwerte der Matrix A
<code>plot(t,x,'g'),hold on;</code>	Zeichnet Vektor x über Vektor t
<code>whos</code>	Zeigt alle im Workspace belegten Variablen



Zur numerischen Zeitintegration stellt MATLAB zwei explizite Einschrittverfahren (`ode23`, `ode45`), ein implizites Einschrittverfahren (`ode23s`), ein Adams-Bashforth-Moulton Prädiktor-Korrektor-Verfahren (`ode113`) und eine implizite "numerical differentiation formula" (`ode15s`) zur Verfügung. Alle Verfahren haben eine eingebaute Schrittweitensteuerung.

```
[t,X] = ode23('<name>',tspan,x0)
```

simuliert ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form $dx/dt = f(t, x)$. Ausgabe ist der Vektor t der Zeitschritte und die Matrix X der Zustandstrajektorien. Die Anzahl der Spalten von X entsprechen der Anzahl der Zustände und die Anzahl der Zeilen entspricht der Anzahl der Zeitschritte.

Eingabe ist mit $\langle name \rangle$ eine Funktion dx/dt , ein (2×1) Vektor $tspan = [t_0, t_{end}]$ welcher die Anfangs- und Endzeit enthält und der Vektor der Anfangsbedingungen $x_0 = [x_1(t_0) \ x_2(t_0) \ \dots \ \dot{x}_1(t_0) \ \dot{x}_2(t_0) \ \dots]$.

Die Funktion $\langle name \rangle$ muss in einer extra Datei $\langle name.m \rangle$ mit entsprechendem Dateiname und folgender Syntax gespeichert sein:

```
function dx = <name>(t, x)
...
dx = ...
```

Beispiel Doppelpendel

```
function dx = doublependulum(t, x)

% state vector x = [alp, bet, Dalp, Dbet]';
alp = x(1); bet = x(2);
Dalp = x(3); Dbet = x(4);
% mass and geometry parameters
m = 1.0; l = 1.0; g = 9.81;
M = zeros(2, 2);
M(1, 1) = l^2*m*(3+2*cos(bet));
M(1, 2) = l^2*m*(cos(bet)+1);
M(2, 1) = l^2*m*(cos(bet)+1);
M(2, 2) = l^2*m;
k = zeros(2, 1);
k(1, 1) = -l^2*m*Dbet*sin(bet)*(Dbet+2*Dalp);
k(2, 1) = l^2*m*Dalp^2*sin(bet);
q = zeros(2, 1);
q(1, 1) = -m*g*l*(2*cos(alp)+cos(alp+bet));
q(2, 1) = -cos(alp+bet)*l*m*g;

dx = [[Dalp; Dbet]; inv(M)*(q-k)];
```




MATLAB Symbolic Toolbox

Mit der Symbolic Toolbox können in MATLAB neben numerischen Berechnungen auch symbolische Untersuchungen durchgeführt werden. Bis zu der MATLAB-Version R2008b basiert die Symbolic Toolbox auf dem MAPLE-Kernel, ab R2009a basiert diese auf MUPAD. In beiden Versionen sind folgende Grundfunktionen enthalten:

<code>syms a b</code>	definieren symbolischer Variablen
<code>c=a+b</code>	Grundrechenarten
<code>d=a*b</code>	
<code>a=5; b=2</code>	Werte zuweisen
<code>e=subs(c)</code>	Ersetzen aller symbolischen Ausdrücke
<code>f=subs(c,b)</code>	Ersetzen von <code>b</code> in <code>c</code>

Beispiel: Berechnung von Jacobi-Matrix und Beschleunigungsvektor

```
syms l1 alpha alpha_ Dalpha D2alpha beta Dbeta D2beta t_  
  
% Vektor der verallgemeinerten Koordinaten und Ableitungen  
y=[alpha;beta]  
Dy=[Dalpha;Dbeta]  
D2y=[D2alpha;D2beta]  
  
% Orstvektor  
r1=[l1*cos(alpha);l1*sin(alpha);0]  
  
% Zeitabhängige Variablen als Taylorreihe darstellen  
alpha_ = alpha + Dalpha*t_+0.5*D2alpha*t_^2  
  
% Berechnung der Geschwindigkeit v1 und Beschleunigung a1  
r1_=subs(r1,alpha,alpha_)  
v1_=diff(r1_,'t_')  
v1=subs(v1_,t_,0)  
  
a1_=diff(v1_,'t_')  
a1=subs(a1_,t_,0)  
  
% Jacobi-Matrix und lokale Beschleunigung  
J1=jacobian(r1,y)  
a1q=a1-J1*D2y
```



Bewegungsgleichungen mit algebraischen Bindungsgleichungen

Schließbedingung

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{y}^b, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_c}$$

Die verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{y}^b sind nicht unabhängig voneinander und das System hat $f = f^b - n_c$ Freiheitsgrade.

Die virtuellen Verrückungen sind ebenfalls nicht unabhängig voneinander:

$$\delta \mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{y}^b} \cdot \delta \mathbf{y}^b = \mathbf{C}(\mathbf{y}^b, t) \cdot \delta \mathbf{y}^b = \mathbf{0}$$

Bewegungsgleichungen

d'Alembert'sche Prinzip

$$\sum_{i=1}^p [\delta \mathbf{r}_i \cdot (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{f}_i^e) + \delta \mathbf{s}_i \cdot (\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{I}_i^e)] = 0$$

Mit den virtuellen Verrückungen und der Kinematik des aufgespannten Baums

$$\delta \mathbf{r}_i = \mathbf{J}_{Ti}^b(\mathbf{y}^b, t) \cdot \delta \mathbf{y}^b \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{s}_i = \mathbf{J}_{Ri}^b(\mathbf{y}^b, t) \cdot \delta \mathbf{y}^b$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{J}_{Ti}^b(\mathbf{y}^b, t) \cdot \dot{\mathbf{y}}^b + \bar{\mathbf{a}}_i^b(\mathbf{y}^b, \dot{\mathbf{y}}^b, t) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{J}_{Ri}^b(\mathbf{y}^b, t) \cdot \dot{\mathbf{y}}^b + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i^b(\mathbf{y}^b, \dot{\mathbf{y}}^b, t)$$

folgt

$$\delta \mathbf{y}^b \cdot \sum_{i=1}^p \left[\left(\mathbf{J}_{Ti}^{bT} \cdot m_i \cdot \mathbf{J}_{Ti}^b + \mathbf{J}_{Ri}^{bT} \cdot \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{J}_{Ri}^b \right) \cdot \dot{\mathbf{y}}^b + \mathbf{J}_{Ti}^{bT} \cdot m_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_i^b + \mathbf{J}_{Ri}^{bT} \cdot \mathbf{I}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i^b + \mathbf{J}_{Ri}^{bT} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{J}_{Ti}^{bT} \cdot \mathbf{f}_i^e - \mathbf{J}_{Ri}^{bT} \cdot \mathbf{I}_i^e \right] = 0, \quad \forall \text{ kinematisch zulässigen } \delta \mathbf{y}^b$$

bzw.

$$\delta \mathbf{y}^b \cdot (\mathbf{M}^b \cdot \dot{\mathbf{y}}^b + \mathbf{k}^b - \mathbf{q}^b) = 0, \quad \forall \delta \mathbf{y}^b: \mathbf{C} \cdot \delta \mathbf{y}^b = \mathbf{0}$$

Mit Satz 2.2 und den Lagrange Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n_c}$ ergibt sich

$$\delta \mathbf{y}^b \cdot (\mathbf{M}^b \cdot \dot{\mathbf{y}}^b + \mathbf{k}^b - \mathbf{q}^b - \mathbf{C}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad \forall \delta \mathbf{y}^b$$

Mit Satz 2.1 lauten dann die Bewegungsgleichungen für MKS mit Schleifenstruktur

$$\mathbf{M}^b(\mathbf{y}^b, t) \cdot \dot{\mathbf{y}}^b + \mathbf{k}^b(\mathbf{y}^b, \dot{\mathbf{y}}^b, t) - \mathbf{C}^T(\mathbf{y}^b, t) \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{q}^b(\mathbf{y}^b, \dot{\mathbf{y}}^b, t)$$



Nichtholonome Bindungen

Geometrische Bindungen:

Beziehung zwischen Lagegrößen
reduziert Freiheitsgrad der Lage und der Geschwindigkeit
Annahme:

alle geometrischen Bindungen sind im Lagevektor enthalten: $y = (y_1, \dots, y_f) \in \mathbb{R}^{\bar{f}}$

Kinematische Bindungen:

Beziehung zwischen Geschwindigkeitsgrößen
reduziert zunächst nur Freiheitsgrad der Geschwindigkeit

implizit: Beschreibung der Einschränkung von k Bewegungsrichtungen

$$A \cdot \dot{y} = \begin{bmatrix} a_1^T(y) \\ \vdots \\ a_k^T(y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{\bar{f}} \end{bmatrix} = 0$$

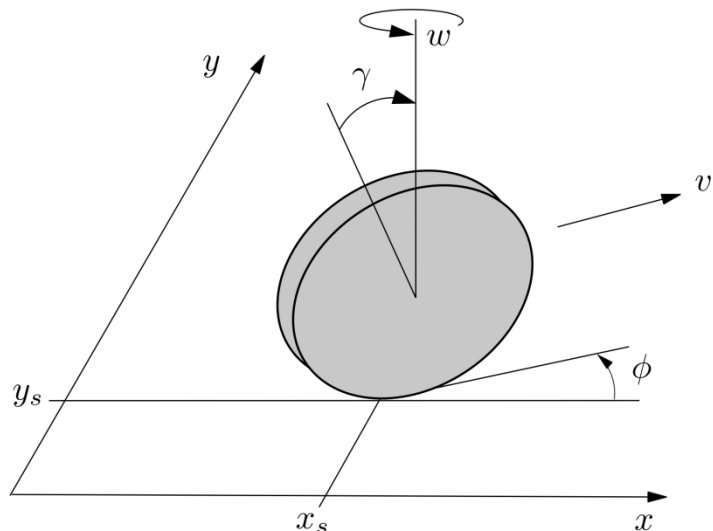
explizit: Beschreibung der $\bar{f} - k$ freien Bewegungsrichtungen

$$\dot{y} = G \cdot z = [g_1(y) \quad \dots \quad g_{\bar{f}-k}(y)] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{\bar{f}-k} \end{bmatrix}$$

Zusammenhang: $A \cdot \dot{y} = A \cdot G \cdot z = 0, \forall z \Rightarrow A \cdot G = 0$

Beispiel: rollendes Rad

$\bar{f} = 4, y = (x_s, y_s, \phi, \gamma)$





Integrierbarkeit kinematischer Bindungen:

einzelne Bindung:

$$a_1(\mathbf{y}) \cdot \dot{\mathbf{y}} = 0, \text{ und } \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{z} = [g_1(\mathbf{y}) \quad \dots \quad g_{\bar{f}-k}(\mathbf{y})] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{\bar{f}-k} \end{bmatrix}$$

Eine kinematische Bindung ist integrierbar, falls eine entsprechende geometrische Bindung existiert:

$$c(\mathbf{y}) = 0 \Rightarrow \dot{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial c}{\partial y_{\bar{f}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_1(\mathbf{y})} \cdot \dot{\mathbf{y}} = 0$$

$$a_1(\mathbf{y}) \cdot \dot{\mathbf{y}} = 0 \text{ integrierbar falls } \frac{\partial a_i}{\partial y_j} = \frac{\partial a_j}{\partial y_i} \quad \forall i, j \text{ erfüllt}$$

(Integrabilitätsbedingung)

integrierbar:

Reduziert Freiheitsgrad der Lage und Geschwindigkeit $f = \bar{f} - 1$
(holonome Bindung)

nicht integrierbar:

Freiheitsgrad der Lage wird nicht reduziert $f = \bar{f}$
Freiheitsgrad der Geschwindigkeit wird reduziert $g = \bar{f} - 1$
(nichtholonome Bindung)

mehrere Bindungen:

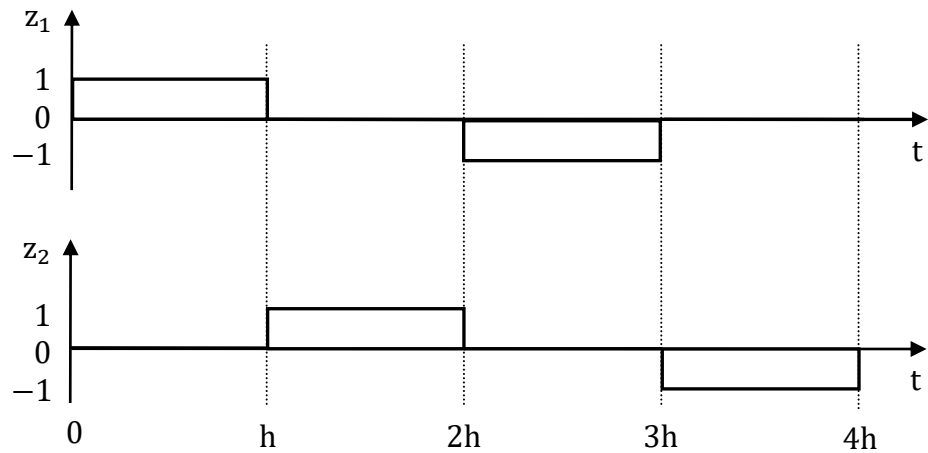
Die Gesamtheit der kinematischen Bindungen muss betrachtet werden.
Dazu ist eine alternative Betrachtung nichtholonomer Bindungen hilfreich:
durch Kombination der $g = \bar{f} - k$ freien Geschwindigkeiten
sind Lageänderungen in den kinematisch gesperrten Richtungen möglich.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{z} = \sum_{i=1}^g g_i(\mathbf{y}) z_i \text{ linear unabhängig von } g_i$$



Überlegung für $g = 2$ $\dot{y} = \mathbf{g}_1(y) z_1 + \mathbf{g}_2(y) z_2$

Schalt-
reihenfolge:



Differentialgleichung: $\dot{y} = \mathbf{g}_1(y)$ $\dot{y} = \mathbf{g}_2(y)$ $\dot{y} = -\mathbf{g}_1(y)$ $\dot{y} = -\mathbf{g}_2(y)$
 Fluss: $\phi_t^{\mathbf{g}_1}$ $\phi_t^{\mathbf{g}_2}$ $\phi_t^{-\mathbf{g}_1}$ $\phi_t^{-\mathbf{g}_2}$

Lageänderung für

$t = h$ $\mathbf{y}(h) = \mathbf{y}_1 = \phi_h^{\mathbf{g}_1}(\mathbf{y}_0)$
 $t = 2h$ $\mathbf{y}(2h) = \mathbf{y}_2 = \phi_h^{\mathbf{g}_2}(\mathbf{y}_1) = \phi_h^{\mathbf{g}_2} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_1}(\mathbf{y}_0)$
 $t = 3h$ $\mathbf{y}(3h) = \mathbf{y}_3 = \phi_h^{-\mathbf{g}_1}(\mathbf{y}_2) = \phi_h^{-\mathbf{g}_1} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_2} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_1}(\mathbf{y}_0)$
 $t = 4h$ $\mathbf{y}(4h) = \mathbf{y}_4 = \phi_h^{-\mathbf{g}_2}(\mathbf{y}_3) = \phi_h^{-\mathbf{g}_2} \circ \phi_h^{-\mathbf{g}_1} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_2} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_1}(\mathbf{y}_0)$

Approximation kleiner Lageänderungen über Taylorreihe 2. Ordnung

$0 \leq t \leq h, \quad \dot{y} = \mathbf{g}_1(y), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$

$$\rightarrow \mathbf{y}(t_0 + h) = \mathbf{y}(t_0) + \left. \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right|_{t_0} h + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} \right|_{t_0} h^2 + \dots$$

$$\downarrow t_0 = 0 \quad \swarrow \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}_1 \quad \swarrow \dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{g}}_1 = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} =: D\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1$$

$$\rightarrow \mathbf{y}_1 \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{10} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} h^2$$



$$h \leq t \leq 2h, \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}_2(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(h) = \mathbf{y}_1$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{y}_2 &\approx \mathbf{y}_1 + \mathbf{g}_{21} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{21} \mathbf{g}_{21} h^2 \\ &\quad \swarrow \rightarrow = \frac{1}{2} D\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) \mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) h^2 \approx \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} h^2 \\ &\quad \searrow \rightarrow = \mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{10} h + \dots) h \approx \left(\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0) + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}_0} (\mathbf{g}_{10} h) \right) h \\ &\quad \quad \quad = \mathbf{g}_{20} h + D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} h^2 \\ &\quad \rightarrow \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{10} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} h^2 \\ &\approx \mathbf{y}_0 + (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20}) h + \left(\frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} + D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} \right) h^2 \end{aligned}$$

$$2h \leq t \leq 3h, \quad \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{g}_1(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(2h) = \mathbf{y}_2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{y}_3 &\approx \mathbf{y}_2 - \mathbf{g}_{12} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{12} \mathbf{g}_{12} h^2 \\ &\quad \swarrow \rightarrow \frac{1}{2} D\mathbf{g}_1(\mathbf{y}_0 + \dots) \mathbf{g}_1(\mathbf{y}_0 + \dots) h^2 \approx \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} h^2 \\ &\quad \searrow \rightarrow = -\mathbf{g}_1(\mathbf{y}_0 + (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20})h + \dots) h \approx -\mathbf{g}_{10} h - D\mathbf{g}_{10} (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20}) h^2 \\ &\quad \rightarrow \approx \mathbf{y}_0 + (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20}) h + \left(\frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} + D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} \right) h^2 \\ \rightarrow \mathbf{y}_3 &\approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{20} h + (D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} - D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{20}) h^2 \end{aligned}$$

$$3h \leq t \leq 4h: \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{g}_2(\mathbf{y}), \mathbf{y}(3h) = \mathbf{y}_3$$

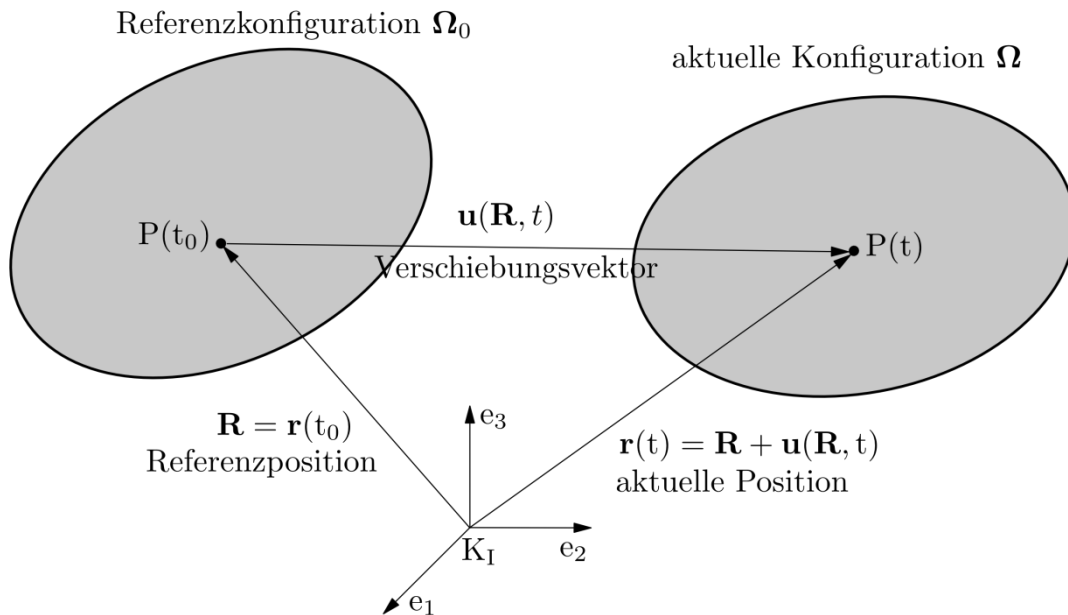
$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{y}_4 &\approx \mathbf{y}_3 - \mathbf{g}_{23} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{23} \mathbf{g}_{23} h^2 \\ &\quad \swarrow \rightarrow \frac{1}{2} D\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) \mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) h^2 \approx \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} h^2 \\ &\quad \searrow \rightarrow = -\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{20} h + \dots) h \approx -\mathbf{g}_{20} h - D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} h^2 \\ &\quad \rightarrow \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{20} h + \left(D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} - D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{20} \right) h^2 \\ &\approx \mathbf{y}_0 + \underbrace{(D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} - D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{20})}_{\mathbf{g}^*} h^2 \end{aligned}$$

$\mathbf{g}^* := [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$ Lie-Klammer ergibt Lageänderung

Kontinuumsmechanische Grundlagen

Kinematik

Die Bewegung eines Körpers K wird durch die Bewegung seiner materiellen Punkte P beschrieben.



Die Verschiebung $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$ enthält Anteile aus der Starrkörperbewegung und der Verformung des Körpers.

Die Verformungen können mit dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor beschrieben werden:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{E}) \text{ mit } \mathbf{G} = \mathbf{G}^T$$

Deformationsgradient: $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{R}_j}$, $i, j = 1, 2, 3$

Verschiebungsgradient: $\Delta \mathbf{F} = \frac{\partial u_i}{\partial R_j}$

Somit folgt

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{E} + \Delta \mathbf{F}$$

und es ergibt sich

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\Delta \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}^T + \Delta \mathbf{F}^T \Delta \mathbf{F}) \text{ bzw. } G_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial R_j} + \frac{\partial u_j}{\partial R_i} + \frac{\partial u_k}{\partial R_i} \frac{\partial u_k}{\partial R_j} \right).$$

Bei Annahme kleiner Verschiebungen $\left| \frac{\partial u_i}{\partial R_j} \right| \ll 1$ können in \mathbf{G} die nichtlinearen Terme vernachlässigt werden. Des Weiteren sind die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial R_j}$ und $\frac{\partial}{\partial r_j}$ äquivalent.

Daraus folgt der lineare Verzerrungstensor $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right)$ mit $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T$.



Beziehungen zwischen Verzerrungen und Verschiebungen

Die unabhängigen Einträge des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors \mathbf{G} und des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ lassen sich zusammenfassen:

$$\hat{\mathbf{G}} = [G_{11} \quad G_{22} \quad G_{33} \quad 2G_{12} \quad 2G_{23} \quad 2G_{13}]$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13}]$$

Definition von Differentialoperatoren mit $\partial_i = \frac{\partial \dots}{\partial R_i}$

$$\mathbf{L}_L = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_N(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1 \partial_1 & \partial_1 u_2 \partial_1 & \partial_1 u_3 \partial_1 \\ \partial_2 u_1 \partial_2 & \partial_2 u_2 \partial_2 & \partial_2 u_3 \partial_2 \\ \partial_3 u_1 \partial_3 & \partial_3 u_2 \partial_3 & \partial_3 u_3 \partial_3 \\ \partial_1 u_1 \partial_2 + \partial_2 u_1 \partial_1 & \partial_1 u_2 \partial_2 + \partial_2 u_2 \partial_1 & \partial_1 u_3 \partial_2 + \partial_2 u_3 \partial_1 \\ \partial_2 u_1 \partial_3 + \partial_3 u_1 \partial_2 & \partial_2 u_2 \partial_3 + \partial_3 u_2 \partial_2 & \partial_2 u_3 \partial_3 + \partial_3 u_3 \partial_2 \\ \partial_3 u_1 \partial_1 + \partial_1 u_1 \partial_3 & \partial_3 u_2 \partial_1 + \partial_1 u_2 \partial_3 & \partial_3 u_3 \partial_1 + \partial_1 u_3 \partial_3 \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich die Beziehung zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{L}_L \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{L}_N(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$$

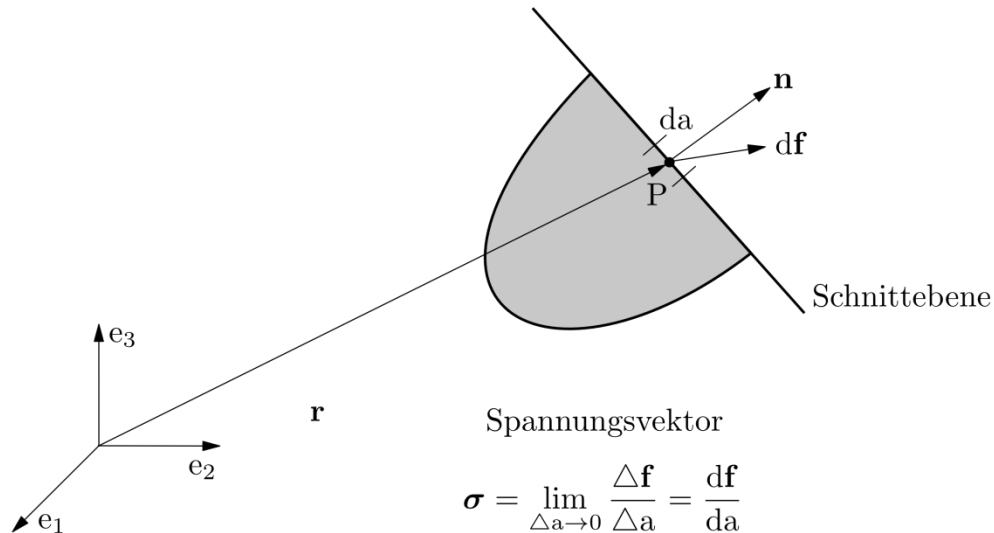
$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}_L \cdot \mathbf{u}$$

und den Verzerrungs- und Verschiebungsgeschwindigkeiten

$$\dot{\hat{\mathbf{G}}} = \mathbf{L}_L \cdot \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{L}}_N(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{L}_N(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{L}_L \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{L}_N(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbf{L}_L \cdot \dot{\mathbf{u}}$$

Spannungsmaße



Der Spannungsvektor hängt von der Orientierung \mathbf{n} der Schnittfläche ab.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$$

wobei \mathbf{T} den Cauchy Spannungstensor bezeichnet.

Oft ist die Betrachtung eines Elements dA und der Normalenrichtung \mathbf{N} in Referenzkonfiguration sinnvoll.

→ 1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor

$$\mathbf{P}_1 = \det(\mathbf{F}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

→ 2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor (symmetrische Modifikation)

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}_1 = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

Die Einträge des Spannungstensors lassen sich wiederum zusammenfassen zu

$$\hat{\mathbf{P}}_2 = [P_{2,11} \quad P_{2,22} \quad P_{2,33} \quad P_{2,12} \quad P_{2,23} \quad P_{2,13}].$$



Konstitutive Gleichungen

- beschreiben den Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verformungszustand
- nur bestimmte Kombinationen aus Spannungs- und Verzerrungsmaßen sinnvoll

Für homogenes elastisches Materialverhalten kann mit dem Green-Lagrange Verzerrungstensor \mathbf{G} und dem 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor \mathbf{P}_2 allgemein die konstitutive Gleichung $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2(\mathbf{G})$ formuliert werden.

Weitere Annahmen:

- isotropes Materialverhalten
- kleine Verzerrung (Linearisierung des Stoffgesetzes)

Es folgt das Stoffgesetz

$$\mathbf{P}_2 = 2\mu \mathbf{G} + \lambda \text{Spur}(\mathbf{G}) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{C} : \mathbf{G},$$

mit den Lamé-Konstanten

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

und dem Elastizitätsmodul E und der Poissonzahl ν .

\mathbf{C} ist ein Tensor vierter Stufe

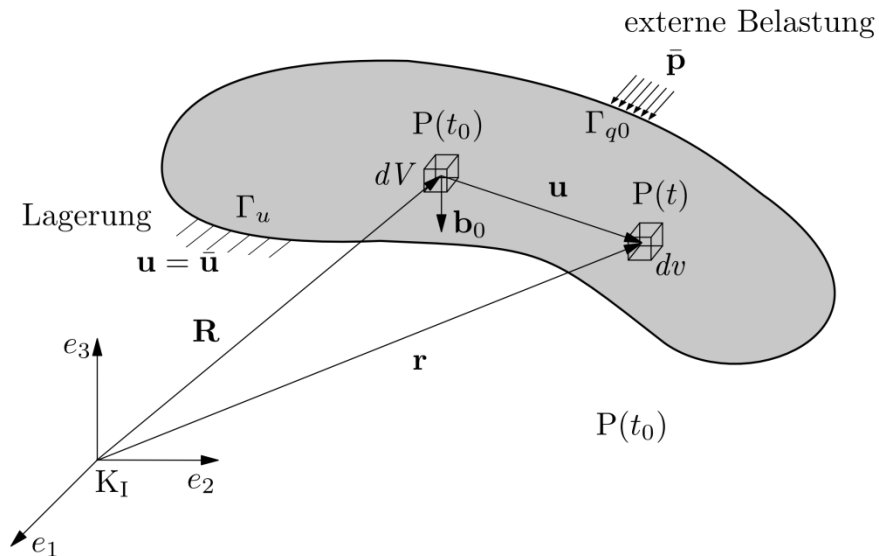
$$C_{ijrs} = \lambda T_{ij} T_{rs} + \mu (T_{ir} T_{js} + T_{is} T_{jr}).$$

Das Stoffgesetz kann auch als $\hat{\mathbf{P}}_2 = \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{G}}$ geschrieben werden.

Dabei ist

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix}.$$

Bewegungsgleichung eines elastischen Körpers



Starke Form

Die Änderung eines Körpers durch äußere Einwirkungen wird durch Bilanzgleichungen beschrieben. Thermodynamische Effekte werden im Weiteren nicht berücksichtigt.

Massenbilanz

$$m = \int_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{R}) dV = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}, t) dv = \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{r}, t) \det(\mathbf{F}) dV = \text{const}$$

Impulsbilanz

$$\rho_0 \mathbf{a} = \rho_0 \mathbf{b}_0 + \text{div}(\mathbf{P}_1) \quad \text{mit}$$

$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$ Beschleunigung

\mathbf{b} Volumenkkräfte

$\text{div}(\mathbf{P}_1)$ Vektor mit Komponenten $\frac{\partial P_{1,ij}}{\partial R_j}$

(Divergenz des 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors)



Drallbilanz

Aus der Drallbilanz folgt die Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2^T$ bzw. des Cauchyschen Spannungstensors $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$.

Rand- und Anfangsbedingungen

Verschiebungsrandbedingung: $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ auf Γ_u

Spannungsrandbedingung: $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{P}_1 \mathbf{N}$ auf Γ_q

Anfangsbedingungen: $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t = 0) = \mathbf{R} - \mathbf{r}(\mathbf{R}, t = 0)$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{R}, t = 0) = \dot{\mathbf{u}}_0$$

Schwache Form

Prinzip der virtuellen Arbeit

Im Gleichgewicht muss die Summe der virtuellen Arbeit aller auf einen Körper wirkenden inneren und äußeren Kräfte verschwinden.

D'Alembertsches Prinzip in Referenzkonfiguration

$$\underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{r} dV}_{\delta W_t} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \mathbf{P}_2 : \delta \mathbf{G} dV}_{\delta W_i = -\delta U} = \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{r} dV + \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r} dA}_{\delta W_e}$$

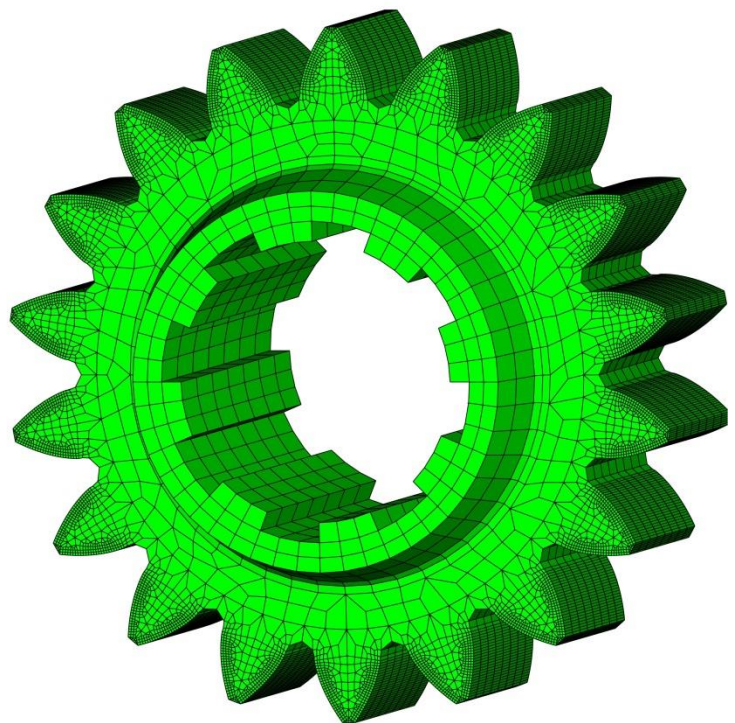
Für lineare Stoffgesetze gilt:

$$\delta W_i = \int_{\Omega_0} \mathbf{P}_2 : \delta \mathbf{G} dV = \int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{G}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \delta \hat{\mathbf{G}} dV$$

Finite-Elemente-Methode (FEM)


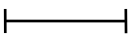
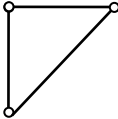
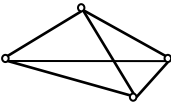

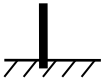
Die kontinuumsmechanische Beschreibung verformbarer Körper führt auf partielle Differentialgleichungen. Der als Lösung gesuchte Verschiebungsverlauf \mathbf{u} muss für alle $\delta\mathbf{u}$ das D'Alembertsche Prinzip erfüllen. Da eine exakte Lösung nur bei einfachen Geometrien und Randbedingungen möglich ist, wird mit dem Galerkin-Verfahren eine Näherungslösung auf Basis von Ansatzfunktionen gesucht. Die Ansätze für die Verschiebung \mathbf{u} und die virtuelle Verschiebung $\delta\mathbf{u}$ müssen den Randbedingungen genügen. Da jedoch globale Ansatzfunktionen für den Gesamtkörper schwierig zu finden sind, wird das Kontinuum in einzelne geometrisch einfache Elemente, den Finiten Elementen unterteilt. Für die Finiten Elemente einfacher Geometrie lassen sich dann passende Ansatzfunktionen finden. Für jedes Element ergeben sich dann lokale Bewegungsgleichungen, die anschließend zu einem Gesamtsystem zusammengesetzt werden.

Die FEM wurde zuerst in der linearen Strukturmechanik angewendet und ist heute fester Bestandteil des computergestützten Entwicklungsprozesses technischer Bauteile. Die lineare FEM hat dabei ein breites Einsatzgebiet in der statischen Spannungsanalyse, der Modalanalyse und der Untersuchung elastodynamischer Vorgänge. Die nichtlineare FEM ermöglicht die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten wie Kontakte, nichtlineares Materialverhalten und große Verformungen. Somit ist es beispielsweise möglich, Umformprozesse, Crashverhalten, reibungserregte Strukturschwingungen sowie Stoßvorgänge zu untersuchen. Die FEM ist nicht auf die Festkörpermechanik beschränkt, sondern sie ist eine allgemeine Methode zur näherungsweise Lösung partieller Differentialgleichungen und findet breite Anwendung in der Strömungsmechanik, Elektrodynamik und Wärmelehre.



Im Weiteren werden kurz einige ausgewählte Grundlagen der linearen FEM vorgestellt. Der Ausgangspunkt der linearen FEM ist die geometrisch linearisierte Beschreibung eines linear-elastischen Kontinuums. Zusammen mit dem D'Alembertschen Prinzip bildet sie die Grundlage der verschiebungsbasierten FEM.

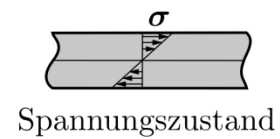
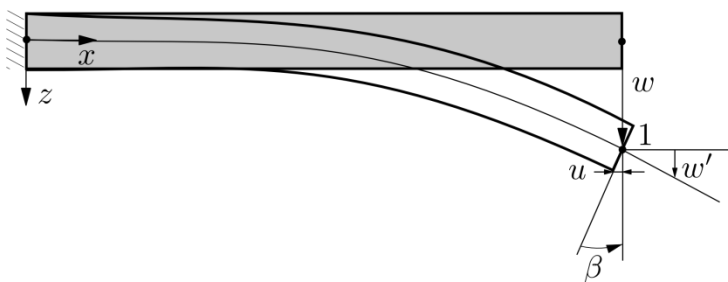


Idealisierungen	<ul style="list-style-type: none">▪ massebehaftete Elemente mit festgelegten Verformungseigenschaften (Trägheit und Steifigkeit)▪ Knotenpunkte (Verknüpfung finiter Elemente, Angriffspunkte für Einzelkräfte, Beschreibung der Verformung)▪ starre, reibungsfreie Bindungselemente		
Symbole	Körper Zug-/Druckstab Balkenelement (Zug/Druck, Bie- gung, Torsion) ebenes Dreieckselement räumliches Tetraederelement ⋮	   	Materialkennwert E Querschnitt A Länge L Dichte ρ Materialkennwerte E, G Querschnitt A Flächenträgheitsmomente Länge L Dichte ρ Materialkennwerte E, ν Dicke h Dichte ρ Materialkennwerte E, ν Dichte ρ
	Bindungselemente Gelenklager feste Einspannung	 	



Finite Elemente: Schubstarres Balkenelement

Im Gegensatz zu Kontinuumselementen liegen bei so genannten Strukturelementen weitere Modellannahmen zu Grunde. Typische Beispiele sind hierbei Balken-, Platten- und Schalenelemente. Im Weiteren wird ein schubstarres Balkenelement betrachtet, welches auf der Euler-Bernoulli Balkentheorie beruht. Hierbei wird angenommen, dass die Querschnitte eben bleiben und senkrecht auf der Biegelinie stehen. Mit diesen Annahmen ergeben sich Elemente deren Knoten neben Verschiebungsfreiheitsgraden auch Rotationsfreiheitsgrade besitzen.



- Länge L
- Querschnittsfläche A
- Flächenträgheitsmoment I_y
- Durchbiegung $w(x)$

Annahmen und Beziehungen

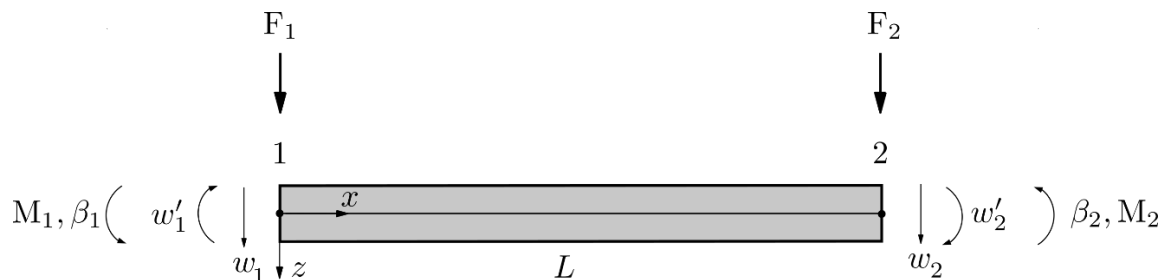
Neigung $w' = -\tan \beta$, für kleine β gilt $\tan \beta \approx \beta$ und somit $w' \approx -\beta$

Längsverschiebung $u = z \beta = -z w' = -z \frac{dw}{dx}$

Dehnung in x-Richtung $\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2} = -z w''$

Einachsiger **Spannungszustand** mit Hookschem Gesetz $\sigma_x = E \varepsilon_x = -E z w''$

Verwendete Konventionen am betrachteten **Balkenelement**





Das **D'Alembertsche Prinzip** für den betrachteten Euler-Bernoulli Balken lautet dann

$$\underbrace{\rho A \int_0^L \delta w \ddot{w} dx}_{\delta W_{m,t}} + \underbrace{\rho I_y \int_0^L \delta w' \ddot{w}' dx}_{\delta W_{m,r}} + \underbrace{EI_y \int_0^L \delta w'' w'' dx}_{\delta W_i} = \underbrace{\int_0^L \delta u s_z dx + F_1 \delta w_1 + F_2 \delta w_2 - M_1 \delta w'_1 - M_2 \delta w'_2}_{\delta W_e}$$

Hierbei ist z.B.

$$\delta W_i = \int_{\Omega_0} \delta \varepsilon_x \sigma_x dV = \int_{\Omega_0} z^2 E \delta w'' w'' dV = E \int_A z^2 dA \int_0^L \delta w'' w'' dx = EI_y \int_0^L \delta w'' w'' dx$$

Ansatzfunktionen für Balkenelemente

Die Ansatzfunktionen für Balkenelemente in der FEM können aus der Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie gewonnen werden.

$$EI w^{IV} = 0$$

$$EI w''' = c_1$$

$$EI w'' = c_2 + c_1 x$$

$$EI w' = c_3 + c_2 x + \frac{1}{2} c_1 x^2$$

$$EI w = c_4 + c_3 x + \frac{1}{2} c_2 x^2 + \frac{1}{6} c_1 x^3$$

Über die Randbedingungen können die Integrationskonstanten c_1 bis c_4 bestimmt werden

$$\text{Knoten ①: } w(0) = \frac{1}{EI} c_4 = w_1 \quad \Rightarrow c_4 = EI w_1$$

$$w'(0) = \frac{1}{EI} c_3 = w'_1 = -\beta_1 \quad \Rightarrow c_3 = -EI \beta_1$$

$$\text{Knoten ②: } w(L) = w_1 - L\beta_1 + \frac{L^2}{2EI} c_2 + \frac{L^3}{6EI} c_1 = w_2$$

$$w'(L) = -\beta_1 + \frac{L}{EI} c_2 + \frac{L^2}{2EI} c_1 = w'_2 = -\beta_2$$



durch Umformungen folgen

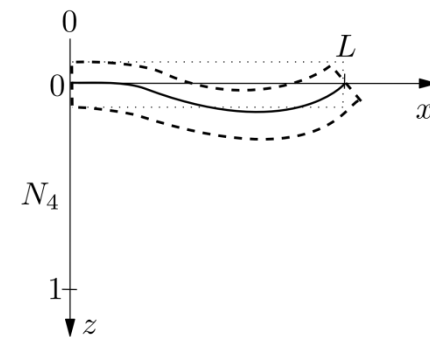
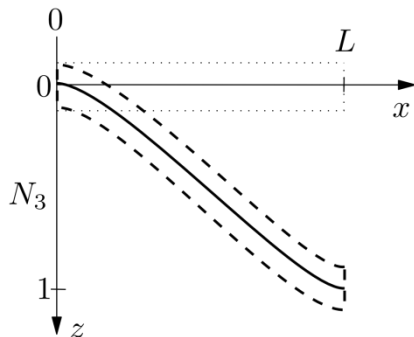
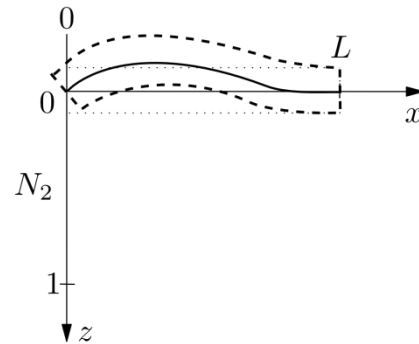
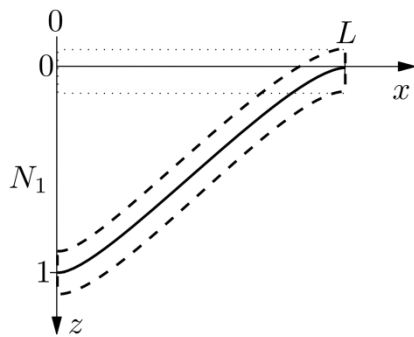
$$c_1 = \frac{6EI}{L^3} (2w_1 - 2w_2 - L\beta_1 - L\beta_2)$$

$$c_2 = \frac{2EI}{L^2} (-3w_1 + 3w_2 + 2L\beta_1 + L\beta_2)$$

Einsetzen der Integrationskonstanten in $w(x)$ und Umformen führt zu

$$w(x) = \underbrace{\left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)}_{N_1} w_1 + \underbrace{\left(-x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right)}_{N_2} \beta_1 + \underbrace{\left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)}_{N_3} w_2 + \underbrace{\left(\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right)}_{N_4} \beta_2$$

$$= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \beta_1 \\ w_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}$$





Element-Massenmatrix (hier Vernachlässigung der rotatorischen Anteile)

Aus der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte folgt

$$\delta W_m = \rho A \int_0^L \delta w \ddot{w} dx = \rho A \int_0^L \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{N}^T \mathbf{N} \cdot \ddot{\mathbf{q}} dx = \delta \mathbf{q} \cdot \rho A \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}$$

und die Massenmatrix lautet somit

$$\mathbf{M} = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 \\ N_4 N_1 & N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 \end{bmatrix} dx = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & 22L \\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Element-Steifigkeitsmatrix

Aus der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte folgt mit $w'' = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}$

$$\delta W_i = EI_y \int_0^L \delta w'' w'' dx = EI_y \int_0^L \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} dx = \delta \mathbf{q} \cdot EI_y \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \cdot \mathbf{q} = \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}$$

Mit den hergeleiteten Ansatzfunktionen \mathbf{N} ist

$$\mathbf{B} = \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} & -\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L} & -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} & -\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L} \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4]$$

und die Steifigkeitsmatrix lautet somit

$$\mathbf{K} = EI_y \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = EI_y \int_0^L \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} dx = \frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$



Mögliche FE-Problemstellungen

Statik

Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad \mathbf{q} = \mathbb{R}^f$$

f : Knotenfreiheitsgrade

→ Verschiebung, Dehnungen, Spannungen

Modalanalyse

Homogenes Problem $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0}$

Lösungsansatz: $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} \cdot e^{i\omega t}, \quad \ddot{\mathbf{q}} = -\hat{\mathbf{q}} \cdot \omega^2 \cdot e^{i\omega t}$

→ Eigenwertproblem (EWP) $(\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \hat{\mathbf{q}} \cdot e^{i\omega t} = \mathbf{0}$

Hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}) = 0.$$

→ $\omega_i^2; i = 1 \dots f$ ω_i^2 : Eigenwerte
 ω_i : Eigenkreisfrequenz

Zu ω_i^2 gehört jeweils ein Eigenvektor Φ_i . Diese Φ_i werden in der FEM meistens normiert, dass mit $\Phi = [\Phi_1 \dots \Phi_f]$ gilt

$$\Phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi = \mathbf{E}$$

$$\Phi^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi = \Omega^2; \quad \Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \omega_f^2 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des EWP folgt nicht über die Lösung des charakteristischen Polynoms sondern z.B. mit einer Vektoriteration.

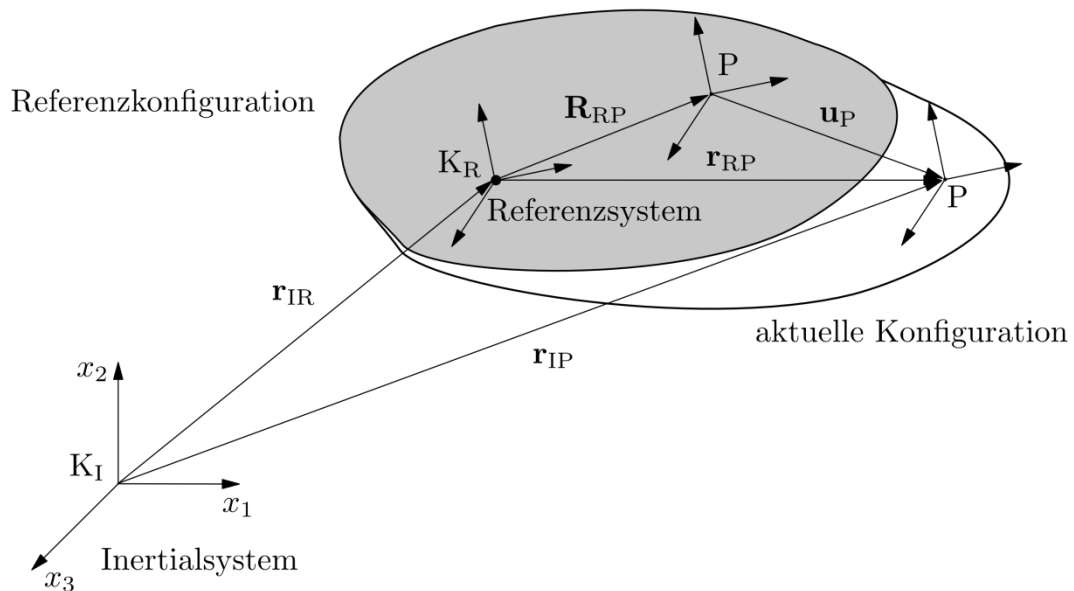
Dynamikanalyse

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_0$$

Lösen des Anfangswertproblems mit numerischen Verfahren. Bei der FEM kommen oft Newmark-Verfahren zum Einsatz. Im Gegensatz zu den bei MKS verwendeten Ein- und Mehrschrittverfahren erfolgt hier kein Übergang in den Zustandsraum.

Ansatz des mitbewegten Referenzsystems (Floating Frame of Reference)

In typischen Anwendungen der Flexiblen Mehrkörpersysteme treten meistens große Verschiebungen und Rotationen aber nur kleine lineare elastische Verformungen auf. In diesem Fall können mit dem Ansatz des mitbewegten Referenzsystems effiziente Modelle erstellt werden. Dabei werden die kleinen elastischen Deformationen in einem Referenzsystem beschrieben, welches große Verschiebungen und Rotationen erfahren kann. Das Referenzsystem ist ein körperbezogenes Koordinatensystem, aber nicht notwendigerweise ein körperfestes Koordinatensystem.





Diskretisierung der Kinematik

Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktes P in diskretisierter Form

$$\mathbf{r}_{IP} = \mathbf{r}_{IR} + \mathbf{R}_{RP} + \Phi_P \cdot \mathbf{q}$$

$$\mathbf{v}_{IP} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\tilde{\mathbf{r}}_{RP} & \Phi_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{RP}^t} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{IR} \\ \boldsymbol{\omega}_{IR} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{IP} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\tilde{\mathbf{r}}_{RP} & \Phi_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{RP}^t} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{IR} \\ \boldsymbol{\alpha}_{IR} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \mathbf{r}_{RP} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{RP}}_{\boldsymbol{\zeta}_{RP}^t}$$

Verdrehung, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung eines am Punkt P fixierten Koordinatensystems

$$\mathbf{s}_{IP} = \mathbf{s}_{IR} \cdot (\hat{\mathbf{S}}_{RP} \cdot (\mathbf{E} + (\widetilde{\Psi_P \cdot \mathbf{q}})))$$

$$\boldsymbol{\omega}_{IP} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} & \Psi_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{RP}^r} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{IR} \\ \boldsymbol{\omega}_{IR} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{IP} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} & \Psi_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{RP}^r} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{IR} \\ \boldsymbol{\alpha}_{IR} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \boldsymbol{\omega}_{RP}}_{\boldsymbol{\zeta}_{RP}^r}$$

Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung jedes einzelnen Punktes eines freien elastischen Körpers kann eindeutig mit folgenden Variablen beschrieben werden:

$$\mathbf{z}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{IR} \\ \boldsymbol{\beta}_{IR} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_{II} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{IR} \\ \boldsymbol{\omega}_{IR} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_{III} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{IR} \\ \boldsymbol{\alpha}_{IR} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$



Kinetik eines freien elastischen Körpers

D'Alembertsche Prinzip in Referenzkonfiguration

$$\underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{a}_{IP} \cdot \delta \mathbf{r}_{IP} dV}_{\delta W_m} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{G}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \delta \hat{\mathbf{G}} dV}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_{\Gamma_{q_0}} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r}_{IP} dA}_{\delta W_p} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{r}_{IP} dV}_{\delta W_b} = 0$$

mit der virtuellen Verrückung $\delta \mathbf{r}_{IP} = \mathbf{T}_{RP}^t \cdot \delta \mathbf{z}_I$

Virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

$$\delta W_m = \left(\int_{\Omega_0} (\mathbf{T}_{RP}^t)^T \cdot \mathbf{T}_{RP}^t dm \cdot \mathbf{z}_{III} + \int_{\Omega_0} (\mathbf{T}_{RP}^t)^T \cdot \boldsymbol{\zeta}_{RP}^t dm \right) \cdot \delta \mathbf{z}_I = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{z}_{III} + \mathbf{h}_\omega) \cdot \delta \mathbf{z}_I$$

Dabei ist $\rho_0 dV = dm$ berücksichtigt. Es ergeben sich hieraus die Massenmatrix $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0$ und der Vektor der Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte \mathbf{h}_ω .

Massenmatrix:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T \\ \boldsymbol{\Phi}_P^T \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{E} \quad -\tilde{\mathbf{r}}_{RP} \quad \boldsymbol{\Phi}_P] dm = \begin{bmatrix} m\mathbf{E} & m\tilde{\mathbf{c}}^T & \mathbf{C}_t^T \\ m\tilde{\mathbf{c}} & \mathbf{I} & \mathbf{C}_r^T \\ \mathbf{C}_t & \mathbf{C}_r & \mathbf{M}_e \end{bmatrix}$$

Masse des Körpers: $m\mathbf{E} = \int_{\Omega_0} \mathbf{E} dm$

Trägheitstensor: $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{RP} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T dm$

Schwerpunktlage: $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{q}) = \frac{1}{m} \int_{\Omega_0} \mathbf{r}_{RP} dm$

Massenmatrix aus elastischem Anteil: $\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}_P^T \cdot \boldsymbol{\Phi}_P dm$

Kopplungsterme: $\mathbf{C}_t = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}_P^T dm$

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{C}_r(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}_P^T \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T dm$$



Vektor der Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte

$$\mathbf{h}_\omega = \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \\ \Phi_{\text{RP}}^{\text{T}} \end{bmatrix} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \mathbf{r}_{\text{RP}} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}}) \, \text{d}m = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\omega\text{t}} \\ \mathbf{h}_{\omega\text{r}} \\ \mathbf{h}_{\omega\text{e}} \end{bmatrix}$$

Hierbei ist es sinnvoll die elastischen Anteile von der Referenzbewegung zu trennen.

translatorischer Anteil:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\omega\text{t}} &= \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \mathbf{r}_{\text{RP}} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \, \text{d}m \\ &= m \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \mathbf{c} + 2m \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \dot{\mathbf{c}} \end{aligned}$$

rotatorischer Anteil:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\omega\text{r}} &= - \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \mathbf{r}_{\text{RP}} + 2\tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \, \text{d}m \\ &= \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} + 2 \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \, \text{d}m \\ &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} + \mathbf{G}_r \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \mathbf{G}_r = \mathbf{G}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 2 \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \, \text{d}m$$

Anteil aus elastischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\omega\text{e}} &= \int_{\Omega_0} \Phi_{\text{P}}^{\text{T}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \mathbf{r}_{\text{RP}} + 2\Phi_{\text{P}}^{\text{T}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IR}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \, \text{d}m \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}}^{\text{T}} \cdot \mathbf{O}_e^1 \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}}^{\text{T}} \cdot \mathbf{O}_e^{n_q} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \end{bmatrix} + \mathbf{G}_e \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \mathbf{G}_e = \mathbf{G}_e(\dot{\mathbf{q}}) = 2 \int_{\Omega_0} \Phi_{\text{P}}^{\text{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{\text{RP}}^{\text{T}} \, \text{d}m$$

und $\mathbf{O}_e^k = \mathbf{O}_e^k(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \tilde{\Phi}_{\text{P}}^{*k} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \, \text{d}m$, wobei $\tilde{\Phi}_{\text{P}}^{*k}$ die k-te Ansatzfunktion ist



Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte

$$\delta W_e = \int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{G}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \delta \hat{\mathbf{G}} dV = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e + \bar{\mathbf{K}}_e(\mathbf{q}_e) \mathbf{q}_e \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_e} \cdot \delta \mathbf{z}_I \quad \text{mit}$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{L}_L \Phi_P \cdot \mathbf{q}_e + \frac{1}{2} \mathbf{L}_N(\Phi_P \mathbf{q}_e) \Phi_P \cdot \mathbf{q}_e = \mathbf{B}_L \cdot \mathbf{q}_e + \frac{1}{2} \mathbf{B}_N(\mathbf{q}_e) \cdot \mathbf{q}_e,$$

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}_L dV \quad \text{und}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_e(\mathbf{q}_e) = \int_{\Omega_0} \left(\mathbf{B}_N^T(\mathbf{q}_e) \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}_L + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N(\mathbf{q}_e))^T \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}_N(\mathbf{q}_e) \right) dV$$

Virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte

aus Oberflächenspannungen $\bar{\mathbf{p}}$

$$\delta W_p = \int_{\Gamma_{q_0}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{RP} \\ \Phi_P^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_p} \cdot \bar{\mathbf{p}} dA \cdot \delta \mathbf{z}_I$$

aus Einzelkräften/Momenten $\mathbf{f}_{P_k}, \mathbf{I}_{P_k}$ angreifend am Punkt P_k

$$\delta W_d = \sum_{k=1}^{n_k} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{RP_k} \\ \Phi_{P_k}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f}_{P_k} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \\ \Psi_{P_k}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{I}_{P_k} \right)}_{\mathbf{h}_d} \cdot \delta \mathbf{z}_I$$

Virtuelle Arbeit der Volumenkräfte

$$\delta W_b = \int_{\Omega_0} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{RP} \\ \Phi_P^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_b} \cdot \mathbf{b} dm \cdot \delta \mathbf{z}_I \quad \text{bei Gravitation } \mathbf{b} = \mathbf{S}_{IP}^T \cdot \mathbf{g}$$

Bewegungsgleichungen eines freien Körpers

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{z}_{III} + \mathbf{h}_\omega + \mathbf{h}_e - \mathbf{h}_p - \mathbf{h}_d - \mathbf{h}_b) \cdot \delta \mathbf{z}_I = 0, \quad \forall \delta \mathbf{z}_I$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{z}_{III} = \underbrace{-\mathbf{h}_\omega - \mathbf{h}_e + \mathbf{h}_p + \mathbf{h}_d + \mathbf{h}_b}_{\mathbf{h}_a}$$

Modellreduktion

Die Modellreduktion linearer Systeme ist heutzutage ein wichtiges Werkzeug zur effizienten Simulation komplexer technischer Systeme, siehe [1]. Sie findet Anwendung in der System- und Regelungstechnik, der Mikrosystemtechnik, der Elektrodynamik und der Mechanik. Dabei sollen die reduzierten Modelle die relevanten Eigenschaften sowie das Ein-/Ausgangsverhalten der Originalsysteme für große Parameterbereiche möglichst gut und mit vorgegebener Fehlergüte annähern.

Eine schöne Einleitung zur Modellreduktion ist auch in Antoulas: „Approximation of Large-Scale Dynamical Systems“ [2] (Standardwerk zur Modellreduktion) zu finden.

In der angewandten Mathematik wurde in den letzten Jahren eine Reihe von neuen Modellreduktionsansätzen neben den traditionellen modalen Ansätzen entwickelt. In [2, 3, 4] wird ein guter Einblick in den aktuellen Stand der Forschung und die Zielrichtung zukünftiger Entwicklungen gegeben.

Prinzipiell gibt es drei Kategorien von Reduktionsverfahren, die relevant für die Modellreduktion elastischer Körper sind: modale Reduktionsverfahren, auf Gramschen Matrizen basierende Verfahren und Krylov-Unterraummethoden, siehe z.B. [5].

Mathematisches Schlüsselkonzept der Modelreduktion ist Projektion

Eine Matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{f \times f}$ wird Projektor auf den Unterraum $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^f$ genannt, wenn $\text{im}(\mathbf{P}) = \mathcal{V}$ und $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

Daraus folgt, dass $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^f$ geschrieben werden kann als

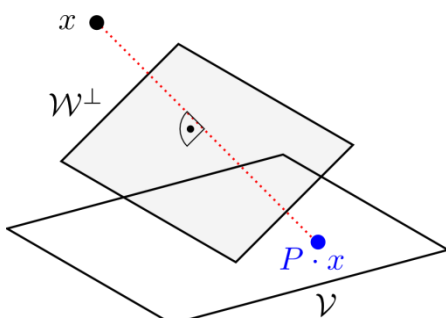
$$\mathbf{q} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{q} + (\mathbf{I} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{q}.$$

Dies erlaubt uns, den Unterraum \mathbb{R}^f in zwei Unterräume

$$\mathbb{R}^f = \text{span}(\mathcal{V} + \mathcal{W}),$$

mit $\text{im}(\mathbf{P}) = \mathcal{V}$ und $\text{kern}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathcal{W}$, aufzuteilen.

Der Projektor \mathbf{P} projiziert auf \mathcal{V} parallel zu \mathcal{W} .



Projektion eines Punktes aus \mathbb{R}^3 in \mathbb{R}^2



Bei zwei Basen

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n], \text{span}(\mathbf{V}) = \mathcal{V},$$

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n], \text{span}(\mathbf{W}) = \mathcal{W}$$

ist der Projektor $\mathbf{P} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{V})^{-1} \cdot \mathbf{W}^T$.

Vereinfachungen:

Biorthogonale Basen

$$\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}^T$$

Orthogonale Projektion

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V})^{-1} \cdot \mathbf{V}^T$$

Orthogonale Projektion mit orthogonaler Basis

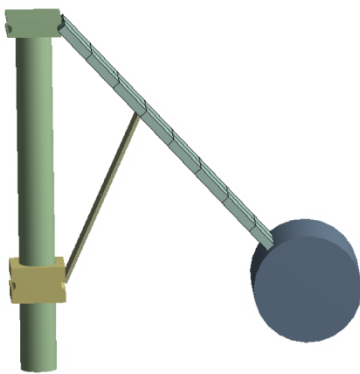
$$\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T$$

Aufgabe von Modellreduktionsverfahren:

Bestimmen der Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} .

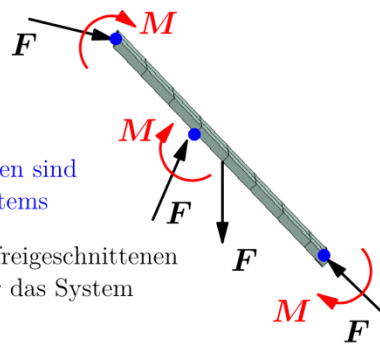
Verwendung des Systemgedankens für die Modellreduktion elastischer Körper:

Elastischer Körper wird als System betrachtet.



Verschiebungen der Knoten sind
 Ausgänge des MIMO-Systems

Kräfte und Momente an freigeschnittenen
 Knoten sind Eingänge für das System



Kräfte (Systemeingänge)

$$\mathbf{F} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t)$$

Verschiebungen (Systemausgänge)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{q}(t)$$

Elastische Körper können als MIMO-System 2. Ordnung geschrieben werden

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{q}$$

Idee: Betrachtung des MIMO Systems 2. Ordnung als Ausgangspunkt für Modellreduktionsverfahren → Reduktion durch Petrov-Galerkin Projektion

$$\underbrace{\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{M}}} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \underbrace{\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{K}}} \cdot \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \underbrace{\mathbf{C} \cdot \mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{C}}} \cdot \bar{\mathbf{q}}$$



Verwendung von Reduktionsverfahren aus Systemtheorie und Regelungstechnik

Werkzeuge:

- Laplace-Transformation in den komplexen s -Raum

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

- Laplace-Transformation des MIMO-Systems bei $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$

$$(s^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{Q}(s) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s)$$
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}(s)$$

Wobei $\mathbf{U}(s)$ und $\mathbf{Y}(s)$ die Laplace-Transformierten des Eingangs und des Ausgangs sind

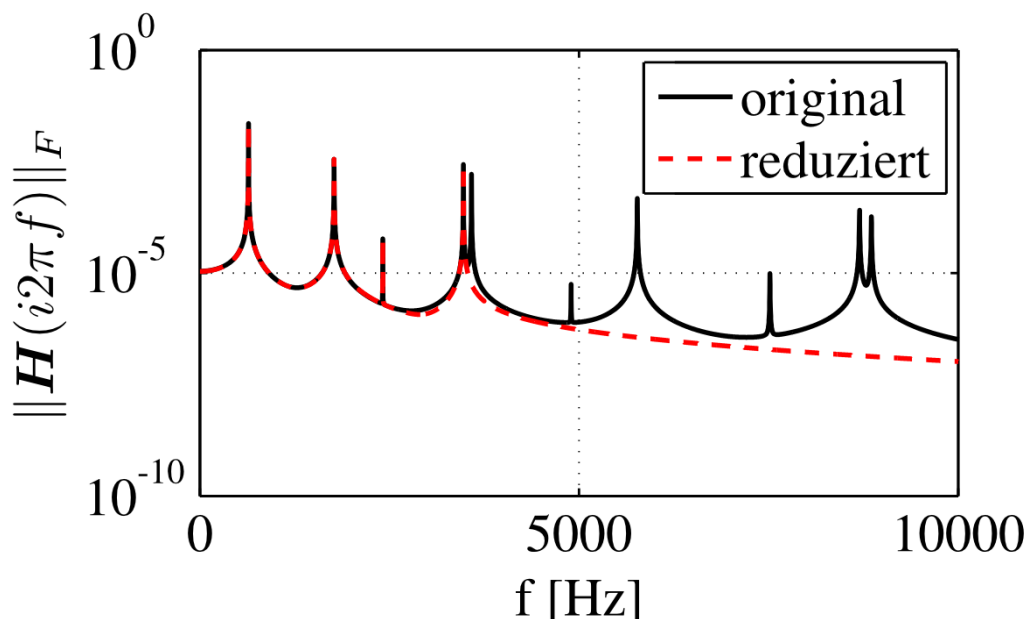
- Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsvektor wird Übertragungsmatrix $\mathbf{H}(s)$ genannt

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s) \cdot \mathbf{U}(s) \rightarrow \mathbf{H}(s) = \mathbf{C} \cdot (s^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

- Übertragungsfunktion
Regelungstechnik: Evaluierung der Übertragungsmatrix auf der imaginären Achse

$$s = i2\pi f$$

$\| \mathbf{H}(i\omega)_{jk} \| \rightarrow$ Verschiebung/Verformung an Ausgang j wenn das System an Eingang k mit Einheitsamplitude und der Frequenz $\omega = 2\pi f$ angeregt wird



Norm der Übertragungsfunktion eines Fliehkraftpendels



Fehlergüte von reduzierten Modellen

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= \mathbf{q}(t) - \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{q}}(t) && \text{Fehler in Zustandskoordinaten} \\ \mathbf{E}(s) &= \mathbf{Q}(s) - \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{Q}}(s) && \text{Fehler im Zustandsraum} \end{aligned}$$

- Ausgangsfehler

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_o(t) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}(t) \\ \mathbf{E}_o(s) &= \mathbf{Y}(s) - \bar{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{C}(s) \cdot \mathbf{Q}(s) - \mathbf{C}(s) \cdot \bar{\mathbf{Q}}(s) \\ &= \mathbf{C} \cdot (\mathbf{Q}(s) - \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{Q}}(s)) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}(s) \end{aligned}$$

- Fehlersystem

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_E(s) &= \mathbf{H}(s) - \bar{\mathbf{H}}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{H}(s) \cdot \mathbf{U}(s) \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{Y}}(s) = \bar{\mathbf{H}}(s) \cdot \mathbf{U}(s) \end{aligned}$$

eingefügt kann der Ausgangsfehler als

$$\mathbf{E}_o(s) = \mathbf{H}(s) \cdot \mathbf{U}(s) - \bar{\mathbf{H}}(s) \cdot \mathbf{U}(s) = \mathbf{H}_E(s) \cdot \mathbf{U}(s)$$

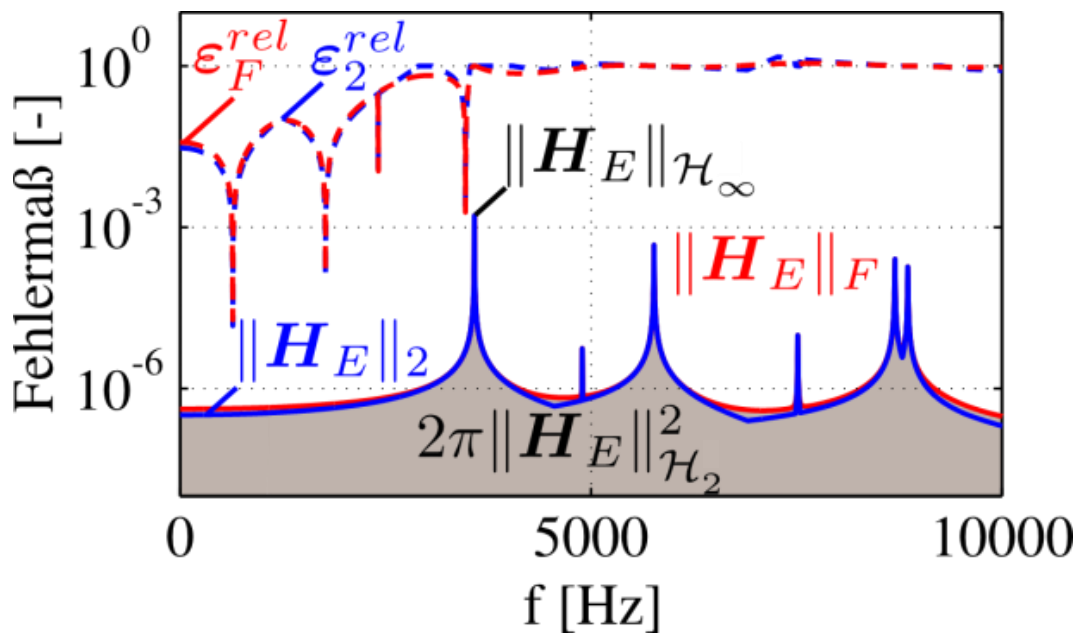
geschrieben werden.

Üblicherweise wird der Fehler in der \mathcal{H}_∞ - bzw. \mathcal{H}_2 -Norm gemessen.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}\|_{\mathcal{H}_\infty} &= \sup_{\mathbf{u} \neq 0} \frac{\|\mathbf{H}\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_2^r(i\mathbb{R})}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_2^p(i\mathbb{R})}} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{H}(\omega)\|_2 \\ \|\mathbf{H}\|_{\mathcal{H}_2} &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}(\mathbf{H}(i\omega) \cdot \mathbf{H}^H(i\omega)) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{H}(i\omega)\|_F^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Häufig erfolgt eine Normierung des Fehlers durch die Norm des Originalsystems $\|\mathbf{H}\|_{\mathcal{F}/2}$.
Diese Fehler werden relative Fehler genannt

$$\epsilon_2^{\text{rel}}(f) = \frac{\|\mathbf{H}_E(i2\pi f)\|_2}{\|\mathbf{H}(i2\pi f)\|_2}, \quad \epsilon_{\mathcal{F}}^{\text{rel}}(f) = \frac{\|\mathbf{H}_E(i2\pi f)\|_{\mathcal{F}}}{\|\mathbf{H}(i2\pi f)\|_{\mathcal{F}}}$$



Verschiedene Fehlermaße

Literatur

- [1] J. Willems. In control, almost from the beginning until the day after tomorrow. *European Journal of Control*, 13(1):71–83, 2007.
- [2] A.C. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. SIAM, Philadelphia, 2005.
- [3] P. Benner, V. Mehrmann, and D.C. Sorensen, editors. *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*, volume 45 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, Germany, 2005.
- [4] W. Schilders, H. van der Vorst, and J. Rommes. *Model Order Reduction*. Springer, Berlin, 2008.
- [5] M. Lehner. *Modellreduktion in elastischen Mehrkörpersystemen (in German)*. Dissertation, Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart, Band 10. Shaker Verlag, Aachen, 2007.



Standarddatenberechnung in Flexiblen Mehrkörpersystemen

Massenmatrix

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega_0} \mathbf{E} \, dm & \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^T \, dm & \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi} \, dm \\ & \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^T \, dm & \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \boldsymbol{\Phi} \, dm \\ \text{sym.} & & \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \, dm \end{bmatrix}$$

Masse

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{E} \, dm = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

Schwerpunkt

$$m\tilde{\mathbf{c}}^T = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^T \, dm = m(\mathbf{c}_0 + \widetilde{\mathbf{c}_1(\mathbf{q})})^T$$

$$\mathbf{c}_0 = \frac{1}{m} \int_{\Omega_0} \mathbf{R}_{\text{RP}} \, dm$$

$$\mathbf{c}_1(\mathbf{q}) = \frac{1}{m} \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi} \, dm \, \mathbf{q} = \frac{1}{m} \mathbf{C}_1 \mathbf{q}$$

Trägheitstensor

$$\mathbf{I}(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}} \tilde{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^T \, dm = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_1(\mathbf{q}) + \mathbf{I}_2(\mathbf{q})$$

$$\mathbf{I}_0 = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{R}}_{\text{RP}} \tilde{\mathbf{R}}_{\text{RP}}^T \, dm$$

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} (\tilde{\mathbf{R}}_{\text{RP}}(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{q})^T + (\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{q})\tilde{\mathbf{R}}_{\text{RP}}^T) \, dm = - \sum_{l=1}^{n_q} (\mathbf{C}_4^l + \mathbf{C}_4^{lT}) q_l$$

$$\mathbf{I}_2(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} (\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{q})(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{q})^T \, dm$$

(\mathbf{I}_2 entfällt bei Linearisierung in den Verformungskoodinaten)



Kopplungsterme - Translation

$$\mathbf{C}_t = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}^T dm = \mathbf{C1}^T$$

Kopplungsterme - Rotation

$$\mathbf{C}_r(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}^T \tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T dm = \mathbf{C}_{r0} + \mathbf{C}_{r1}(\mathbf{q})$$

$$\mathbf{C}_{r0} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}^T \tilde{\mathbf{R}}_{RP}^T dm = \mathbf{C2}^T$$

$$\mathbf{C}_{r1}(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}^T (\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\mathbf{q})^T dm = \sum_{l=1}^{n_q} \mathbf{C5}_l^T q_l$$

Massenmatrix des elastischen Subsystems

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} dm = \mathbf{C3}_{11} + \mathbf{C3}_{22} + \mathbf{C3}_{33}$$

Generalisierte Trägheitskräfte

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\omega t} \\ \mathbf{h}_{\omega r} \\ \mathbf{h}_{\omega e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \mathbf{r}_{RP} + 2 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \dot{\mathbf{r}}_{RP} dm \\ - \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{RP} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \mathbf{r}_{RP} + 2 \tilde{\mathbf{r}}_{RP} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \dot{\mathbf{r}}_{RP} dm \\ \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \mathbf{r}_{RP} + 2 \boldsymbol{\Phi}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \dot{\mathbf{r}}_{RP} dm \end{bmatrix}$$

Anteile aus der Translation

$$\mathbf{h}_{\omega t} = 2 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \mathbf{C1} \dot{\mathbf{q}} + m \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \mathbf{c}$$

Anteile aus der Rotation

$$\mathbf{h}_{\omega r} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{IR} + \sum_{l=1}^{n_q} \mathbf{G}_{rl}(\mathbf{q}) \dot{q}_l \boldsymbol{\omega}_{IR}$$

$$\mathbf{G}_{rl}(\mathbf{q}) = -2 \mathbf{C4}_l - 2 \sum_{k=1}^{n_q} \mathbf{C6}_{kl} q_k$$



Anteile aus den elastischen Verformungen

$$\mathbf{h}_{\omega e} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}}^T \mathbf{O}_e^1 \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}}^T \mathbf{O}_e^{n_q} \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}} \end{bmatrix} + \sum_{l=1}^{n_q} \mathbf{G}_{el} \dot{q}_l \boldsymbol{\omega}_{\text{IR}}$$

$$\mathbf{O}_e^k = \int_{\Omega_0} (\tilde{\mathbf{R}} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{*k})^T dm + \sum_{l=1}^{n_q} \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{*k} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{*l} dm q_l = \mathbf{C4}_k^T + \sum_{l=1}^{n_q} \mathbf{C6}_{kl} q_l$$

$$\mathbf{G}_{el} = 2 \int_{\Omega_0} (\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{*l} \boldsymbol{\Phi})^T dm = 2 \mathbf{C5}_l^T$$

Neben der Berechnung von m , \mathbf{c}_0 und \mathbf{I}_0 müssen die folgenden Integrale für eine effiziente Auswertung der Bewegungsgleichungen im Vorfeld der Zeitintegration berechnet werden:

Integral	Dimension
$\mathbf{C1} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi} dm$	$[3 \times n_q]$
$\mathbf{C2} = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{R}} \boldsymbol{\Phi} dm$	$[3 \times n_q]$
$\mathbf{C3}_{\alpha\beta} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}_{\alpha*}^T \boldsymbol{\Phi}_{\beta*} dm$	$[n_q \times n_q]$
$\mathbf{C4}_l = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{*l} dm$	$[3 \times 3]$
$\mathbf{C5}_l = \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{*l} \boldsymbol{\Phi} dm$	$[3 \times n_q]$
$\mathbf{C6}_{kl} = \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{*k} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{*l} dm$	$[3 \times 3]$

Hinweise zur Notation:

$$l, k = 1, \dots, n_q$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

$\boldsymbol{\Phi}_{\alpha*}$: α -te Zeile von $\boldsymbol{\Phi}$

$\boldsymbol{\Phi}_{*l}$: l -te Spalte von $\boldsymbol{\Phi}$



Standard Input Data

Beispiel: fest eingespannter elastischer Balken mit 2 elastischen Freiheitsgraden

2 2 :No. nodes, No. modes:SID generated by FEMBS-V.FE-C including Geo_Stiff= yes at Mar 31 09;
14:51:47 from FEMBS input data=
part

```
new modal =
  refmod
    mass = 2.750000000000D-01
    nelastq = 2
    ielastq ( 1) = Eigen Mode 1 : 8.150 Hz
    ielastq ( 2) = Eigen Mode 2 : 51.069 Hz
  end refmod
frame
  new node = 1
  rframe = body ref
  origin
    order = 1
    nrow = 3
    ncol = 1
    nq = 2
    nqn = 0
    structure = 0
  end origin
  phi
    order = 1
    nrow = 3
    ncol = 2
    nq = 2
    nqn = 0
    structure = 0
  end phi
  psi
    order = 1
    nrow = 3
    ncol = 2
    nq = 2
    nqn = 0
    structure = 0
  end psi
  AP
    order = 0
    nrow = 3
    ncol = 3
    nq = 2
    nqn = 0
    structure = 4
  end AP
end node
new node = 2
  rframe = body ref
  origin
    order = 1
    nrow = 3
    ncol = 1
    nq = 2
    nqn = 0
    structure = 3
    m0( 2, 1) = -1.000000000000D+00
    m1( 1, 1, 1) = 3.81378332228D+00
    m1( 1, 2, 1) = 3.81322968010D+00
  end origin
  phi
    order = 0
    nrow = 3
    ncol = 2
    nq = 2
    nqn = 0
    structure = 3
    m0( 1, 1) = 3.81378332228D+00
    m0( 1, 2) = 3.81322968010D+00
  end phi
```



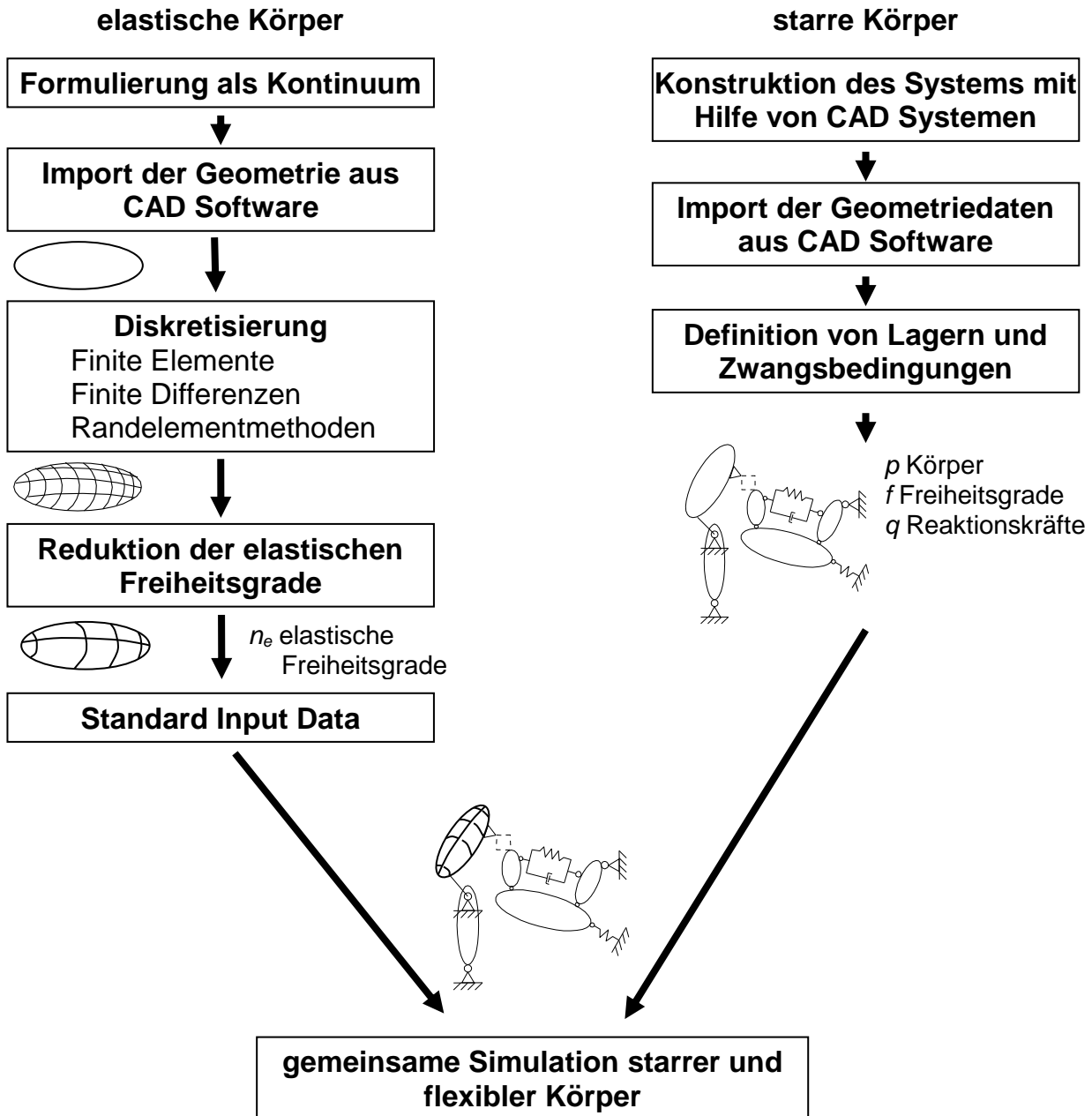
```
psi
  order      = 0
  nrow      = 3
  ncol      = 2
  nq        = 2
  nqn       = 0
  structure  = 3
  m0( 3, 1) = 5.24972079193D+00
  m0( 3, 2) = 1.82316641872D+01
end psi
AP
  order      = 1
  nrow      = 3
  ncol      = 3
  nq        = 2
  nqn       = 0
  structure  = 3
  m0( 1, 1) = 1.00000000000D+00
  m0( 2, 2) = 1.00000000000D+00
  m0( 3, 3) = 1.00000000000D+00
  m1( 2, 1, 1) = 5.24972079193D+00
  m1( 2, 2, 1) = 1.82316641872D+01
  m1( 1, 1, 2) = -5.24972079193D+00
  m1( 1, 2, 2) = -1.82316641872D+01
end AP
end node
end frame
mdCM
  order      = 1
  nrow      = 3
  ncol      = 1
  nq        = 2
  nqn       = 0
  structure  = 3
  m0( 2, 1) = -1.37500000000D-01
  m1( 1, 1, 1) = 4.10596034065D-01
  m1( 1, 2, 1) = -2.27549663301D-01
end mdCM
J
  order      = 1
  nrow      = 6
  ncol      = 1
  nq        = 2
  nqn       = 0
  structure  = 3
  m0( 1, 1) = 9.16690000000D-02
  m0( 2, 1) = 4.58333000000D-06
  m0( 3, 1) = 9.16690000000D-02
  m1( 4, 1, 1) = 2.98315104180D-01
  m1( 4, 2, 1) = -4.75842387323D-02
end J
Ct
  order      = 0
  nrow      = 2
  ncol      = 3
  nq        = 2
  nqn       = 0
  structure  = 3
  m0( 1, 1) = 4.10596034065D-01
  m0( 2, 1) = -2.27549663301D-01
end Ct
Cr
  order      = 0
  nrow      = 2
  ncol      = 3
  nq        = 2
  nqn       = 0
  structure  = 3
  m0( 1, 3) = 2.98297624851D-01
  m0( 2, 3) = -4.76017192439D-02
end Cr
Me
  order      = 0
  nrow      = 2
  ncol      = 2
  nq        = 2
  nqn       = 0
  structure  = 2
```



```
m0( 1, 1) = 1.000000000000D+00
m0( 2, 2) = 1.000000000000D+00
end Me
Gr
order = 0
nrow = 3
ncol = 6
nq = 2
nqn = 0
structure = 3
m0( 1, 3) = 5.96595249703D-01
m0( 1, 4) = -9.52034384879D-02
m0( 2, 1) = 3.49586561369D-05
m0( 2, 2) = 3.49610233011D-05
end Gr
Ge
order = 0
nrow = 2
ncol = 6
nq = 2
nqn = 0
structure = 3
end Ge
Oe
order = 1
nrow = 2
ncol = 6
nq = 2
nqn = 0
structure = 3
m0( 1, 4) = -2.98315104180D-01
m0( 2, 4) = 4.75842387323D-02
m1( 1, 1, 1) = -7.74569625086D-05
m1( 1, 2, 1) = -1.22977545973D-04
m1( 2, 1, 1) = -1.22977545973D-04
m1( 2, 2, 1) = -5.40018755613D-04
m1( 1, 1, 2) = -1.00000000000D+00
m1( 2, 2, 2) = -1.00000000000D+00
m1( 1, 1, 3) = -9.99975575746D-01
m1( 1, 2, 3) = -2.07524486567D-05
m1( 2, 1, 3) = -2.07524486567D-05
m1( 2, 2, 3) = -9.99508490859D-01
end Oe
ksigma
order = 0
nrow = 2
ncol = 1
nq = 2
nqn = 0
structure = 0
end ksigma
Ke
order = 0
nrow = 2
ncol = 2
nq = 2
nqn = 0
structure = 2
m0( 1, 1) = 2.62221792179D+03
m0( 1, 2) = 1.56874793781D-06
m0( 2, 1) = 1.56904041540D-06
m0( 2, 2) = 1.02961026274D+05
end Ke
De
order = 0
nrow = 2
ncol = 2
nq = 2
nqn = 0
structure = 2
m0( 1, 1) = 2.04830385316D+00
m0( 2, 2) = 1.28350162461D+01
end De
end modal
end part
```



Programmtechnische Umsetzung der Modellierung und Simulation Flexibler Mehrkörpersysteme





MKS mit verallgemeinerten Geschwindigkeiten

Die verallgemeinerten Geschwindigkeiten \mathbf{z} legen die Ableitung der verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{y} eindeutig fest.

Kinematik – Dgl.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}); \mathbf{y} \in \mathbb{R}^f$$

Beschreibung der Kinematik

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{J}_{Ti}^T \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{J}_{Ri}^T \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i = \boldsymbol{\omega}_i(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = \mathbf{L}_{Ti} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{a}}_i(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial t} = \mathbf{L}_{Ri} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Virtuelle Verrückungen

$$\delta' \mathbf{v}_i = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{z}} \cdot \delta' \mathbf{z} = \mathbf{L}_{Ti}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \delta' \mathbf{z}$$

$$\delta' \boldsymbol{\omega}_i = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{z}} \cdot \delta' \mathbf{z} = \mathbf{L}_{Ri}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \delta' \mathbf{z}$$

Jourdainsche Prinzip

$$\delta' \mathbf{z}^T \sum_{i=1}^p [\mathbf{L}_{Li}^T \cdot (m_i \mathbf{L}_{Ti} \cdot \dot{\mathbf{z}} + m_i \bar{\mathbf{a}}_i - \mathbf{f}_i^e) + \mathbf{L}_{Ri}^T \cdot (\mathbf{I}_i \cdot \mathbf{L}_{Ri} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{I}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{I}_i^e)] = 0, \forall \delta' \mathbf{z}$$

Mit Satz 2.1 ergibt sich

Kinetik – Dgl.

$$\mathbf{M}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{k}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{q}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{g \times g}$: Massenmatrix,

$\mathbf{k} \in \mathbb{R}^g$: Vektor der verallg. Kreisel-, Zentrifugal- und Corioliskräfte

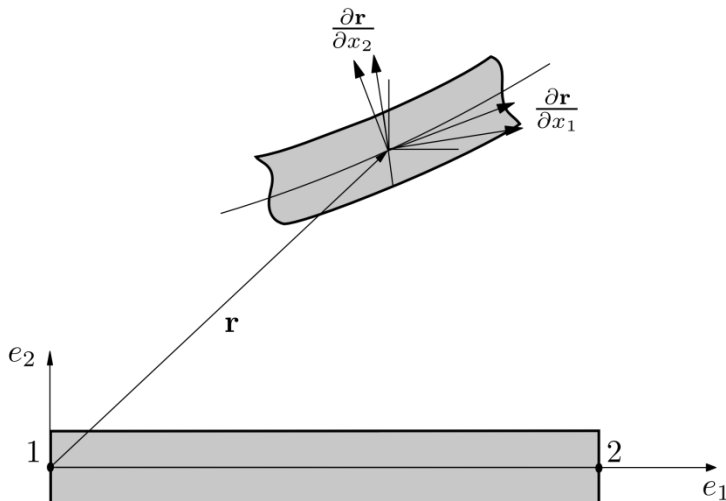
$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^g$: Vektor der verallg. Kräfte

Kinematik- und Kinetikdifferentialgleichung bilden zusammen die Zustandsgleichung der Bewegung. Die Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(t_0, \mathbf{z}(t_0))$ sind beliebig.

ANCF: Ansatzfunktionen eines 2D-Balkenelements

Darstellung des Positionsvektors mit dem Polynom

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{P}_2 \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_1^2 + a_5 x_1^3 \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2 + b_4 x_1^2 + b_5 x_1^3 \end{bmatrix}$$



Ziel: Trennung der Variablen, d.h. darstellen des Positionsvektor als ein Produkt von ortsabhängigen Formfunktionen und zeitabhängigen Variablen:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{e}(t)$$

Transformation der Polynomkoeffizienten $\mathbf{a}(t)$ auf die Knotenkoordinaten $\mathbf{e}(t) = \mathbf{B}_p \mathbf{a}(t)$

Bedingungen am Knoten 1, $\mathbf{x} = [0 \ 0]^T$:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{,1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{,2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}$$

Bedingungen am Knoten 2, $\mathbf{x} = [1 \ 0]^T$:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} e_7 \\ e_8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{,1} = \begin{bmatrix} e_9 \\ e_{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{,2} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}$$

Aus den Bedingungen an den Knoten 1 und 2 folgt:

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & l^2 & l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & 0 & 0 & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2l & 3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2l & 3l^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mit der Transformationsmatrix \mathbf{B}_p und den dimensionslosen Koordinaten $\xi = x_1/l$ und $\eta = x_2/l$ ergibt sich die Matrix der Formfunktionen:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{B}_p^{-1}$$

$$\mathbf{S} = [s_1E \quad s_2E \quad s_3E \quad s_4E \quad s_5E \quad s_6E], \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei

$$s_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad s_2 = l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \quad s_3 = l(\eta - \eta\xi),$$

$$s_4 = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad s_5 = l(-\xi^2 + \xi^3), \quad s_6 = l\eta\xi$$

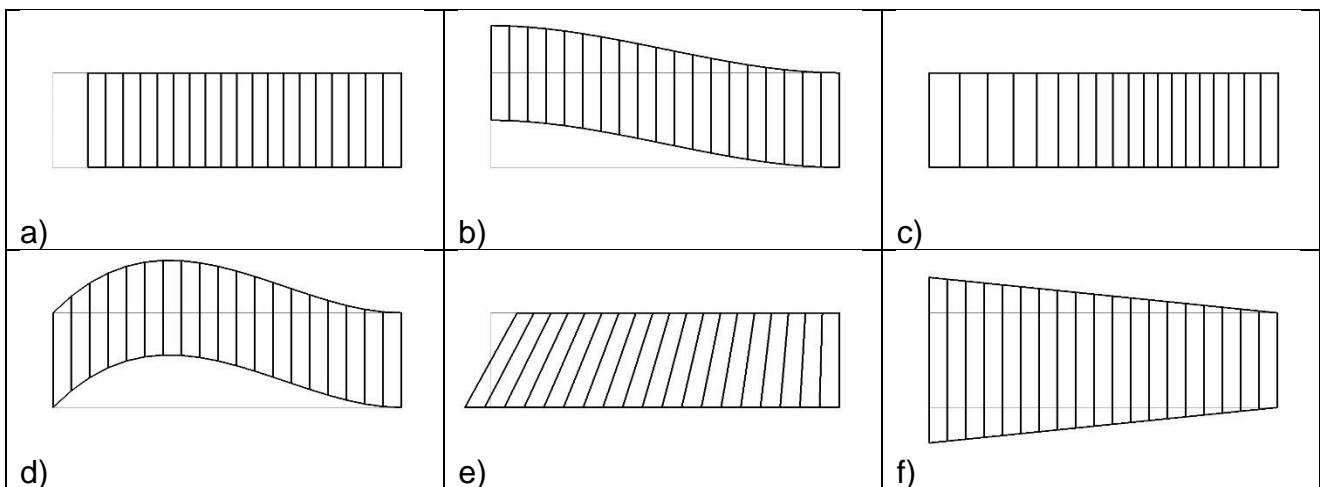


Abb.1: Die Abbildungen a) bis f) zeigen die Verschiebungsfelder bei Auslenkung der Knotenkoordinaten e_1 bis e_6 .



ANCF: Kinetik eines freien Elements

Prinzip von D'Alembert

$$\delta W_t + \delta W_i = \delta W_{e,s} + \delta W_{e,b}$$

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{S} \delta \mathbf{e}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \mathbf{S} \dot{\mathbf{e}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} = \mathbf{S} \ddot{\mathbf{e}}$$

Virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

$$\delta W_t = \int_V \rho \mathbf{a}^T \delta \mathbf{r} dV = \ddot{\mathbf{e}}^T \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV \delta \mathbf{e} = \ddot{\mathbf{e}}^T \mathbf{M} \delta \mathbf{e}$$

mit

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV$$

Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte

$$\delta W_i = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{G} dV$$

$$\delta \mathbf{G} = \{ \delta \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} \}$$

$$\delta W_i = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{C} : \mathbf{G}) : \delta \mathbf{G} dV = \mathbf{q}_i^T \delta \mathbf{e}$$

Virtuelle Arbeit der eingprägten Einzel- und Volumenkräfte

$$\delta W_{e,s} = \hat{\mathbf{F}}^T \delta \mathbf{r} = \hat{\mathbf{F}}^T \mathbf{S} \delta \mathbf{e}$$

$$\delta W_{e,b} = \int_V \mathbf{b}^T \delta \mathbf{r} dV = \int_V \mathbf{b}^T \mathbf{S} dV \delta \mathbf{e}$$

Bewegungsgleichung eines finiten Elements

$$\{ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{e,s} - \mathbf{q}_{e,b} \}^T \delta \mathbf{e} = 0, \quad \forall \delta \mathbf{e}$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{q}_{e,s} + \mathbf{q}_{e,b} - \mathbf{q}_i$$



Regelung starrer Mehrkörpersysteme

Typische Beispiele geregelter starrer Mehrkörpersysteme sind Roboter und Werkzeugmaschinen. Im Allgemeinen entspricht hier die Anzahl der Stellgrößen den Freiheitsgraden des Systems

Bewegungsgleichungen $\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}$ (1)

End-Effektor Position $\mathbf{r}^{\text{EF}} = \mathbf{r}^{\text{EF}}(\mathbf{y})$ (2)

Sollbahn \mathbf{r}_d^{EF} 2-mal stetig differenzierbar

System ist voll aktuiert $\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{r}^{\text{EF}} \in \mathbb{R}^f$

Die Reglerstruktur für starre MKS (im besonderen Roboter) besteht aus drei Teilen:

1. Inverse Kinematik
2. Inverse Dynamik
3. Rückführender Regler



Inverse Kinematik

Mit der Inversen Kinematik wird für eine gegebene Sollbahn \mathbf{r}_d^{EF} des End-Effektors (Tool-Center Point) die dazugehörigen Trajektorien \mathbf{y} (incl. $\dot{\mathbf{y}}_d, \ddot{\mathbf{y}}_d$) der verallgemeinerten Koordinaten berechnet.

$$\mathbf{r}^{\text{EF}}(\mathbf{y}_d) = \mathbf{r}_d^{\text{EF}} \Rightarrow \mathbf{y}_d = \mathbf{r}^{\text{EF}^{-1}}(\mathbf{r}_d^{\text{EF}}) \quad (3)$$

Die Inverse Kinematik kann auf unterschiedliche Weise geschehen, siehe [1,2]:

- algebraisches Lösen der nichtlinearen Gleichung (3)
- numerisches Lösen von (3), z.B. mit Newton-Raphson Verfahren
- differentielle Kinematik

Inverse Dynamik (Vorsteuerung, feedforward control)

Mit der Inversen Dynamik wird für gegebene $\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d, \ddot{\mathbf{y}}_d$ die dazugehörigen Stellgrößen \mathbf{u}_d berechnet. Dazu wird die Bewegungsgleichung (1) algebraisch aufgelöst:

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y}_d)[\mathbf{M}(\mathbf{y}_d, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{k}(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d, t) - \mathbf{q}(\mathbf{y}_d, \dot{\mathbf{y}}_d, t)] \quad (4)$$

Sind die Anfangsbedingungen $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0), \dot{\mathbf{y}}_0 = \dot{\mathbf{y}}(t_0)$ des MKS mit denen der Sollbahnen $\mathbf{y}_d(t_0), \dot{\mathbf{y}}_d(t_0)$ identisch, die Modellparameter in (4) exakt bekannt und liegen keine externen Störungen vor, so folgt das MKS exakt den gewünschten Trajektorien \mathbf{y} bzw. \mathbf{r}_d^{EF} .

Rückführender Regler (feedback control)

Da in der Realität immer Unsicherheiten und Störungen auftreten ist ein Regler zwingend notwendig. Eine gute Vorsteuerung trägt den Hauptteil der „Regelungsarbeit“, der Regler muss dann nur kleine Fehler ausgleichen. Daher sind hier oft einfache Regler einsetzbar, z.B. PID-Regler, LQR (Linear Quadratic Regulator), ...

PID-Regler: $\mathbf{u}_r = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{y}_d - \mathbf{y}) + \mathbf{D} \cdot (\dot{\mathbf{y}}_d - \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{I} \cdot \int (\mathbf{y}_d - \mathbf{y}) dt$

Hierbei sind $\mathbf{P}, \mathbf{D}, \mathbf{I}$ $f \times f$ Diagonalmatrizen mit den Reglerverstärkern.

Die Vorsteuerung und der Regler können weitergehend unabhängig von einander entworfen werden (Reglerstruktur mit zwei Entwurfswahlfreiheitsgraden).



Exakte Zustandslinearisierung (feedback linearization)

Eine Alternative zur obigen Regelungsstruktur ist die exakte Linearisierung durch nichtlineare Koordinatentransformation und Zustandsrückführung. Dies ist eine auf differentialgeometrischen Konzepten basierende Methode für allgemeine nichtlineare Systeme, siehe [3-5]. Die einfachste Anwendung dieses Verfahrens ist die Regelung starrer MKS (computed torque).

Der Reglerentwurf erfolgt hierbei in den Schritten:

1. Nichtlineare Koordinatentransformation der Systemgleichungen in Koordinaten des Systemausgangs (Eingangs-Ausgangs-Normalform). Da in der Bewegungsgleichung (1) die verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{y} den Systemausgang bilden, ist (1) schon in der notwendigen Form.
2. Kompensation der Nichtlinearitäten in der Bewegungsgleichung (1) durch nichtlineare Zustandsrückführung der gemessenen Größen \mathbf{y} :

$$\mathbf{u} = {}_f\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y})[\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) - \mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)] \quad (5)$$

Hierbei stellt \mathbf{v} einen neuen Systemeingang da.

3. Die Bewegungsgleichung (1) und das rückführende Gesetz (5) liefert ein exakt linearisiertes System:

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}_f$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{M}(\mathbf{y}, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y})[\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) - \mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)]$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{v} \quad (6)$$

4. Die Gleichung (6) stellt f Ketten von 2 Integratoren da. Diese linearen Subsysteme können nun über den neuen Systemeingang \mathbf{v} mit linearen Reglern geregelt werden:

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{P}_1 \cdot (\dot{\mathbf{y}}_d - \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{P}_0 \cdot (\mathbf{y}_d - \mathbf{y}) \quad (7)$$

Hierbei sind $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ $f \times f$ Diagonalmatrizen. Setzt man (7) in (6) ergibt sich mit dem Trajektorienfehler $\mathbf{e} = \mathbf{y}_d - \mathbf{y}$ die Fehlerdynamik:

$$(\ddot{\mathbf{y}}_d - \ddot{\mathbf{y}}) + \mathbf{P}_1 \cdot (\dot{\mathbf{y}}_d - \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{P}_0 \cdot (\mathbf{y}_d - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{P}_1 \cdot \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (8)$$



Die Fehlerdynamik (8) sind f entkoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

$$\ddot{e} + P_1 \cdot \dot{e} + P_0 \cdot e = 0 \quad \text{für} \quad i = 1(1)f \quad (9)$$

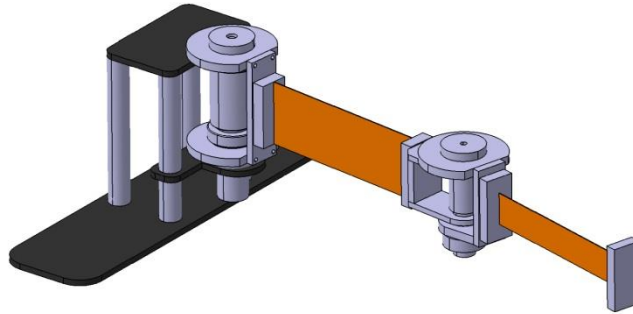
Es ist zu beachten, dass (9) der Schwingungsdifferentialgleichung eines gedämpften Feder-Masse-Schwingers entspricht. Durch geeignete Wahl der Parameter P_0, P_1 kann dann eine gewünschte Dynamik des Trajektorienfehlers erreicht werden.

Literatur

- [1] Spong, M.W.; Hutchinson, S.; Vidyasagar, M.: Robot Modeling and Control. John Wiley & Sons, 2006.
- [2] Siciliano, B.; Sciavicco, L.; Villani, L.; Oriolo, G.: Robotics - Modelling, Planning and Control. London: Springer, 2010.
- [3] Isidori, A.: Nonlinear Control Systems. London: Springer, 3 Edn., 1995.
- [4] Sastry, S.: Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control. Interdisciplinary Applied Mathematics. New York: Springer, 1999.
- [5] Slotine, J.J.; Li, W.: Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.

Regelung flexibler Mehrkörpersysteme

Geregelte flexible Mehrkörpersysteme sind typische unteraktuierte Mehrkörpersysteme, da weniger Stellgrößen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ als verallgemeinerte Koordinaten $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^f$ vorliegen ($m < f$). Im Allgemeinen haben bei flexiblen MKS die elastischen Koordinaten $\mathbf{y}_e \in \mathbb{R}^{f_e}$ keinen oder nur sehr wenige Stelleingriffe (z.B. durch Piezoaktuatoren).



Bewegungsgleichungen in partitionierter Form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{se} \\ \mathbf{M}_{se}^T & \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_s \\ \dot{\mathbf{y}}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_s \\ \mathbf{k}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_{ee} \cdot \mathbf{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_s \\ \mathbf{q}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s \\ \mathbf{B}_e \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

Verallgemeinerte Koordinaten: $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_s \ \mathbf{y}_e] \in \mathbb{R}^f$ mit $\mathbf{y}_s \in \mathbb{R}^{f_s}$ und $\mathbf{y}_e \in \mathbb{R}^{f_e}$

End-Effektor Position: $\mathbf{r}^{EF} = \mathbf{r}^{EF}(\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_e)$ (2)

Sollbahn: \mathbf{r}_d^{EF} 2-mal stetig differenzierbar

Annahmen für weitere Betrachtung

- Es liegen so viele Stellgrößen wie Starrkörperfreiheitsgrade vor, d.h. $\mathbf{u}, \mathbf{y}_s, \mathbf{r}^{EF} \in \mathbb{R}^m$
- Die Stellgrößen \mathbf{u} wirken an den Gelenken (typischer elastischer Roboter)
- Das flexible MKS wird mit einem Tangentensystem modelliert, somit wird bei einem System in Baumstruktur $\mathbf{B}_s = \mathbf{E}$ und $\mathbf{B}_e = \mathbf{0}$.

Vorgehen: Reglerentwurf mit zwei Entwurfswfreiheitsgraden (Vorsteuerung+Regler)

- Vorsteuerung basierend auf starrem MKS führt zu inakzeptablen Schwingungen
- Beim Vorsteuerungsentwurf für flexible MKS müssen Inverse Kinematik und Inverse Dynamik im Allgemeinen gemeinsam betrachtet werden, da die nichtlineare Gleichung $\mathbf{r}^{EF}(\mathbf{y}_{s,d}, \mathbf{y}_{e,d}) = \mathbf{r}_d^{EF}$ einerseits unterbestimmt ist und andererseits die Lösung $\mathbf{y}_{s,d}, \mathbf{y}_{e,d}$ die Bewegungsgleichung (1) erfüllen muss.

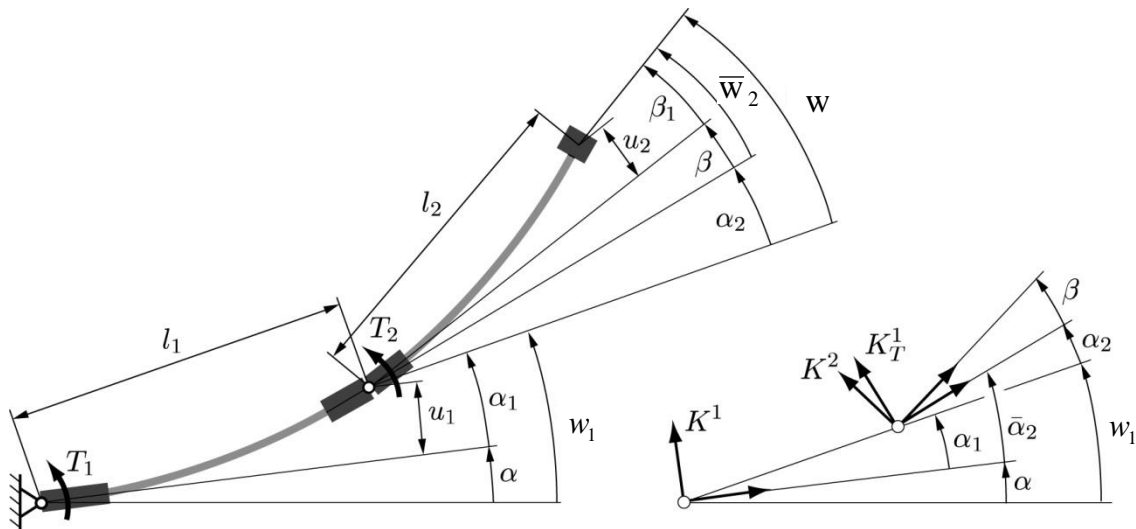
Vorsteuerungsentwurf durch exakte Modellinversion

Ein exaktes inverses Modell kann mit denselben differential-geometrischen Ansätzen wie die exakte Zustandslinearisierung erhalten werden. Hierzu wird die Bewegungsgleichung (1) zunächst mittels Koordinatentransformation in Koordinaten des Systemausgangs überführt. Hieraus lässt sich dann einfach ein inverses Modell ableiten.

1. Definition eines geeigneten Systemausgangs

Zur Vereinfachung der Koordinatentransformation bietet sich bei elastischen Robotern oft an einen neuen linear kombinierten Systemausgang $\mathbf{w} = \mathbf{y}_s + \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{y}_e$ mit konstanter Gewichtungsmatrix $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{m \times f_e}$ zu definieren. Dieser neue Systemausgang kann als Hilfswinkel aufgefasst werden.

Beispiel: elastischer 2-Arm Roboter



$$\mathbf{r}^{\text{ef}}(\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_e) \approx \bar{\mathbf{r}}^{\text{ef}}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(w_1) + l_2 \cos(w_1 + w_2) \\ l_1 \sin(w_1) + l_2 \sin(w_1 + w_2) \end{bmatrix} \quad (3)$$



2. Koordinatentransformation

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ mit } \mathbf{x} = [\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{y}}_s, \dot{\mathbf{y}}_e]^T \quad \mathbf{z} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) \text{ mit } \mathbf{z} = [\mathbf{w}, \mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{w}}, \dot{\mathbf{y}}_e]^T$$

Zur Koordinatentransformation müssen in der Bewegungsgleichung (1) die Starrkörperkoordinaten ersetzt werden, d.h. $\mathbf{y}_s = \mathbf{w} - \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{y}_e$, $\dot{\mathbf{y}} = {}_s\dot{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\Gamma} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e$ und $\ddot{\mathbf{y}} = {}_s\ddot{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\Gamma} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_e$. Nach Umformung ergibt sich die Bewegungsgleichung in neuen Koordinaten:

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{k}} + \mathbf{u} \quad (4)$$

$$(\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_e = \mathbf{q}_e - \mathbf{k}_e - \mathbf{K}_{ee} \cdot \mathbf{y}_e - \mathbf{D}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{k}} + \mathbf{u}) \quad (5)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{ss} - (\mathbf{M}_{se} - \mathbf{M}_{ss} \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot (\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma})^{-1} \cdot \mathbf{M}_{se}^T$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_s - (\mathbf{M}_{se} - \mathbf{M}_{ss} \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot (\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma})^{-1} \cdot \mathbf{q}_e$$

$$\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k}_s - (\mathbf{M}_{se} - \mathbf{M}_{ss} \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot (\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma})^{-1} \cdot (\mathbf{k}_e + \mathbf{K}_{ee} \cdot \mathbf{y}_e + \mathbf{D}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e)$$

3. Inverses Modell

Die Bewegungsgleichungen (4-5) sind nun geeignet, um ein inverses Modell herzuleiten. Die Solltrajektorien des neuen Ausgangs $\mathbf{w}_d, \dot{\mathbf{w}}_d$ können mit (3) mittels einer inversen Kinematik bestimmt werden.

Die benötigten Stellkräfte folgen dann aus (4)

$$\mathbf{u}_d = \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{w}_d, \mathbf{y}_e) \cdot \ddot{\mathbf{w}}_d + \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{w}_d, \mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{w}}_d, \dot{\mathbf{y}}_e) - \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{w}_d, \mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{w}}_d, \dot{\mathbf{y}}_e) \quad (6)$$

Hierbei sind die Trajektorien der elastischen Koordinaten $\mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{y}}_e$ unbekannt. Mit (5) unter Verwendung von (6) folgt hierfür die Differentialgleichung

$$(\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_e = \mathbf{q}_e - \mathbf{k}_e - \mathbf{K}_{ee} \cdot \mathbf{y}_e - \mathbf{D}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \ddot{\mathbf{w}}_d \quad (7)$$

Simulationsergebnisse

Trajektorienfehler für elastischen 2-arm Roboter

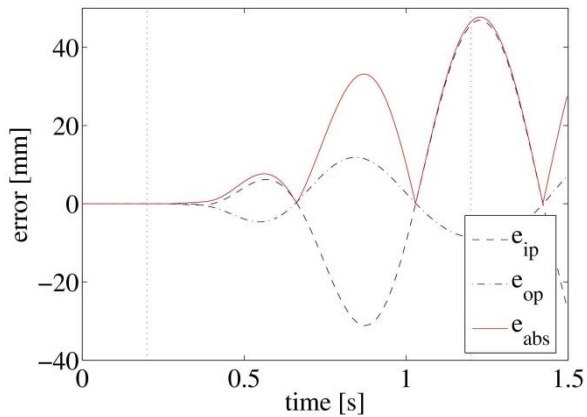


Bild 1: Vorsteuerung basierend auf starrem Modell

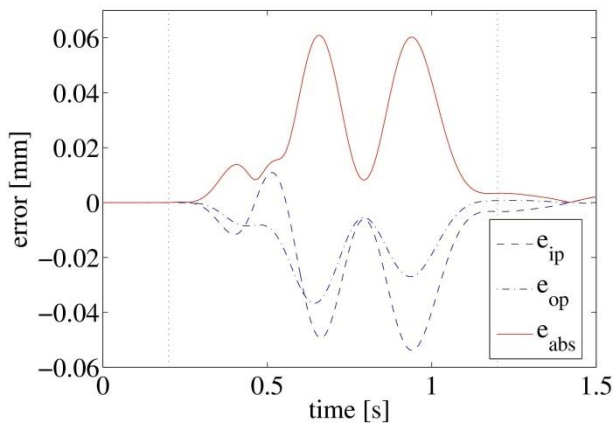


Bild 2: Exakt inverses Modell (instabile interne Dynamik, lösen eines Randwertproblems notwendig)

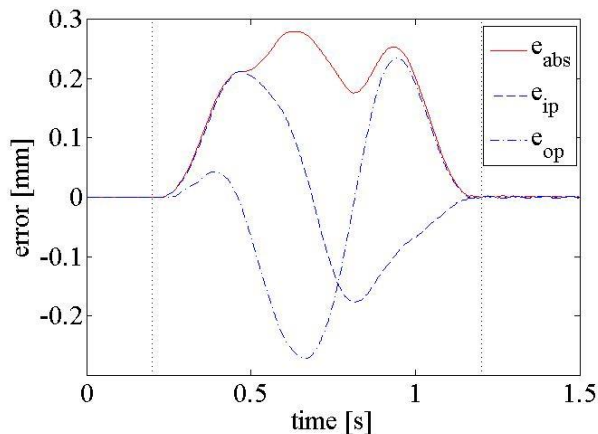


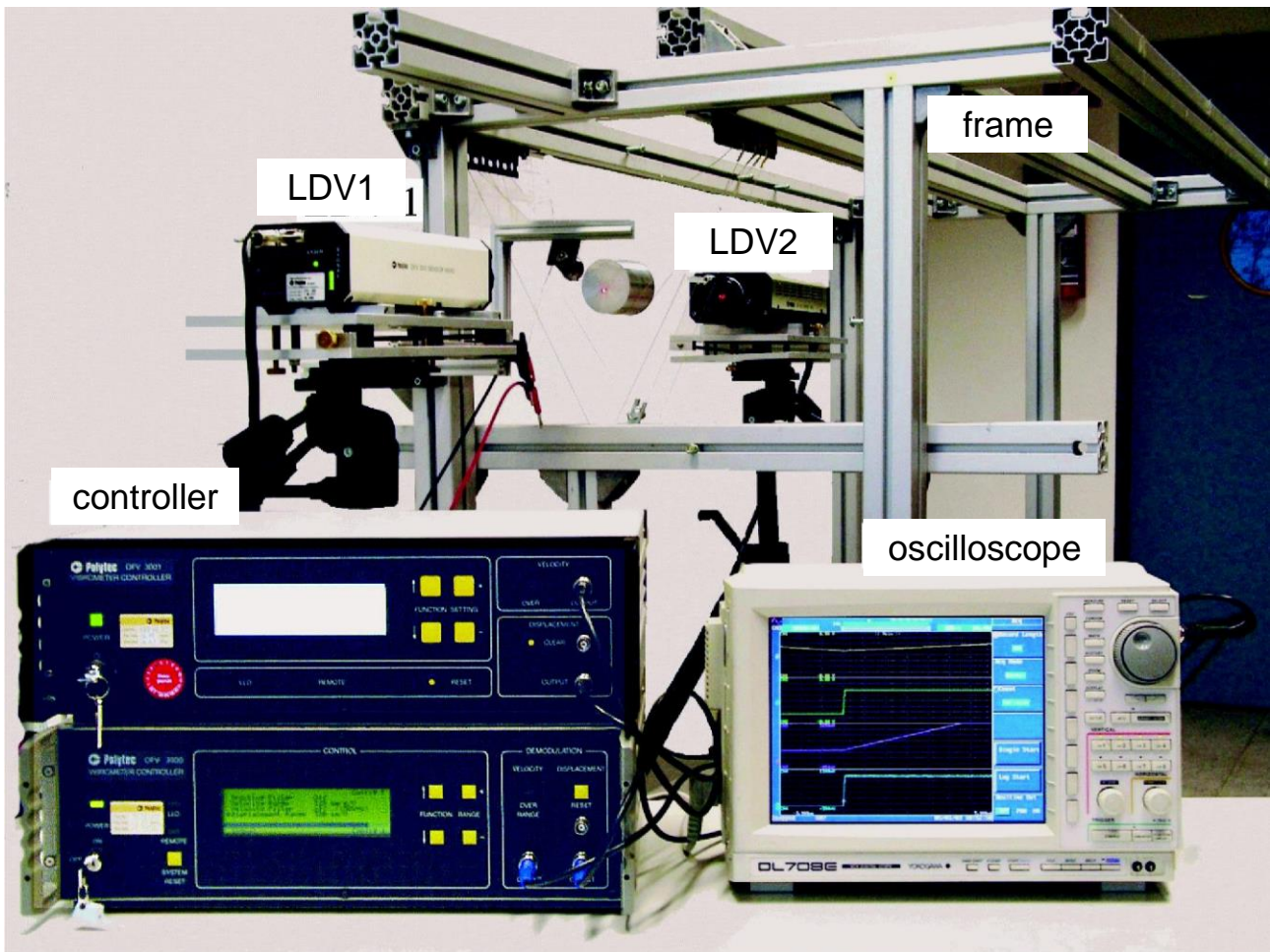
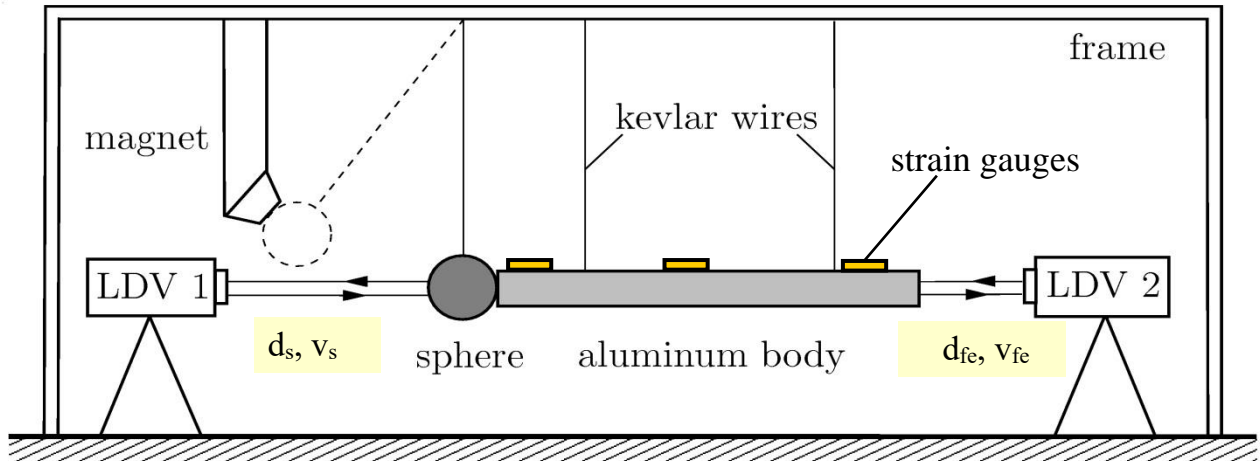
Bild 3: Optimiertes inverses Modell (stabile interne Dynamik, lösen durch Zeitintegration möglich)

Literatur

- [1] Burkhardt, M. Model-Based Feed-Forward Control for Mechatronic Systems with Structural Elasticity Shaker Verlag, 2019.



Versuchsaufbau für Stoßanalyse

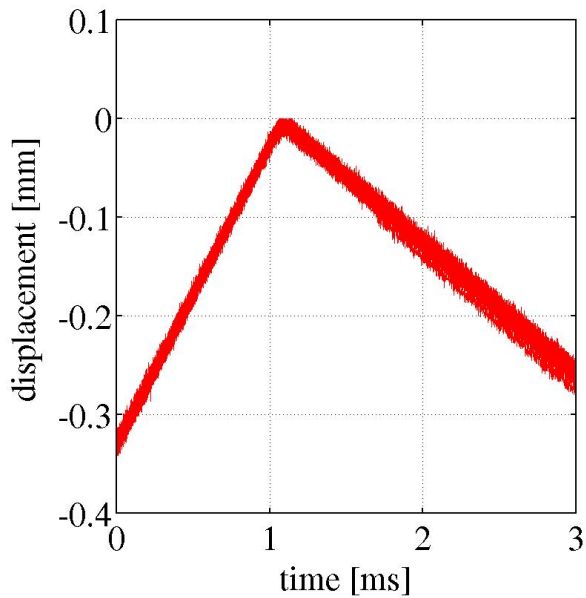




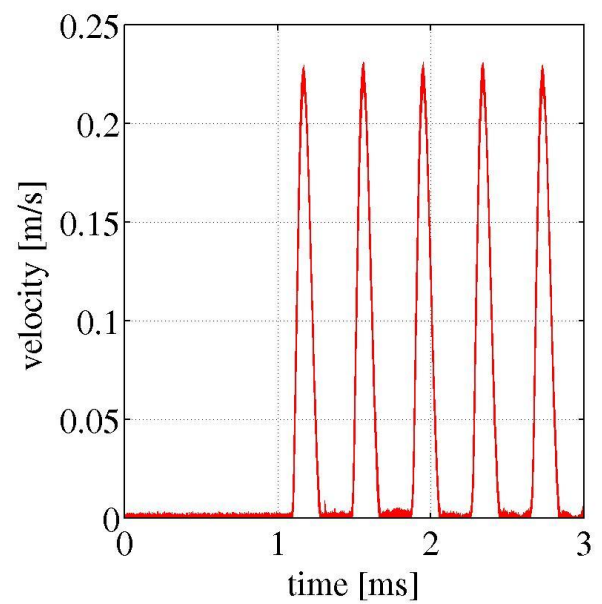
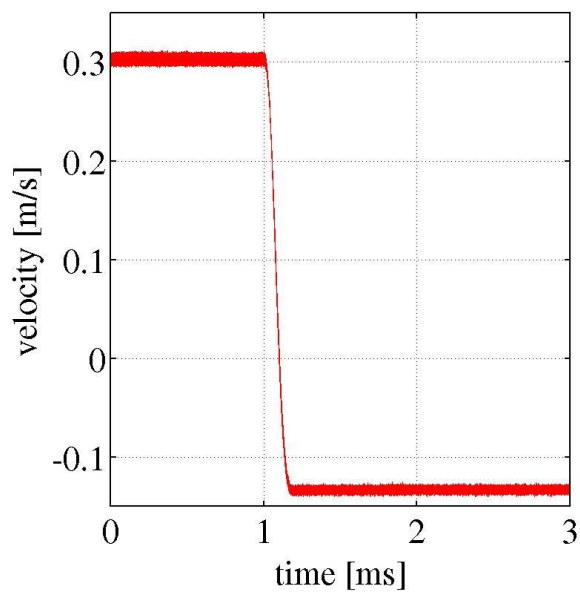
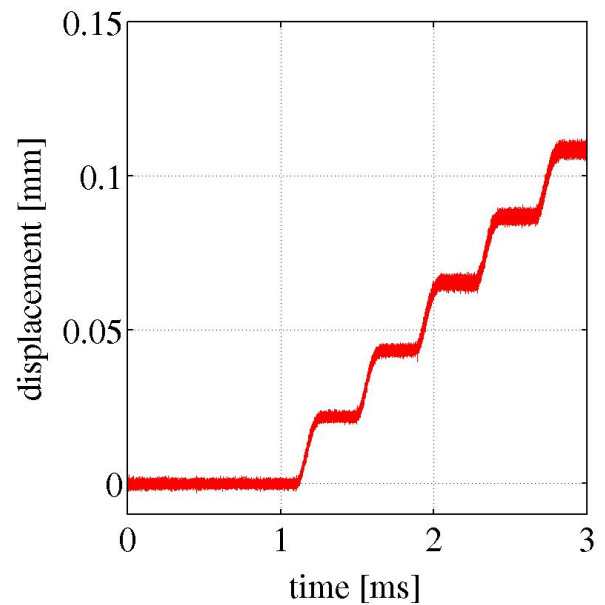
Stoß Stahlkugel-Aluminiumstab: 20 Messung mit LDV

(Kugel: $r=15\text{mm}$, Stab: $r=10\text{mm}$, $l=1000\text{mm}$)

Kugel

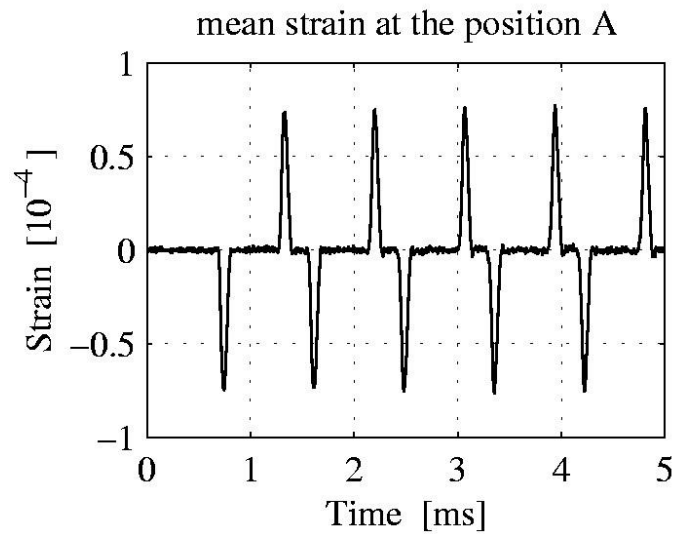
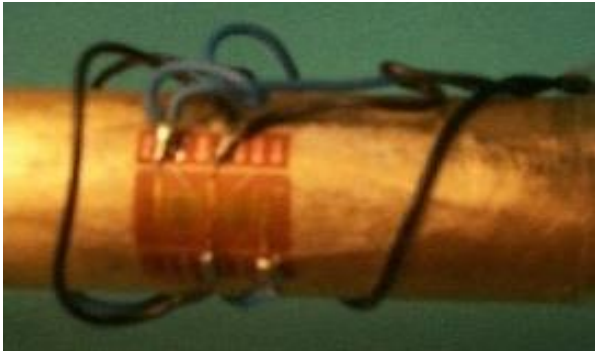


Stab





Messung der Dehnungen am Stab mit DMS



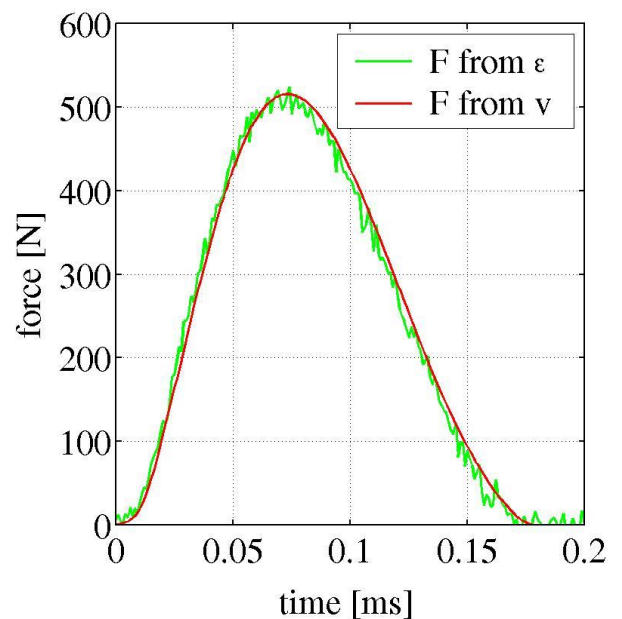
Bestimmung der Stoßkräfte am Stab

aus DMS Messung ε : $F = A E \varepsilon$

aus LDV Messung v_{fe} : $F = \frac{A E v_{fe}}{2c}$ mit $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

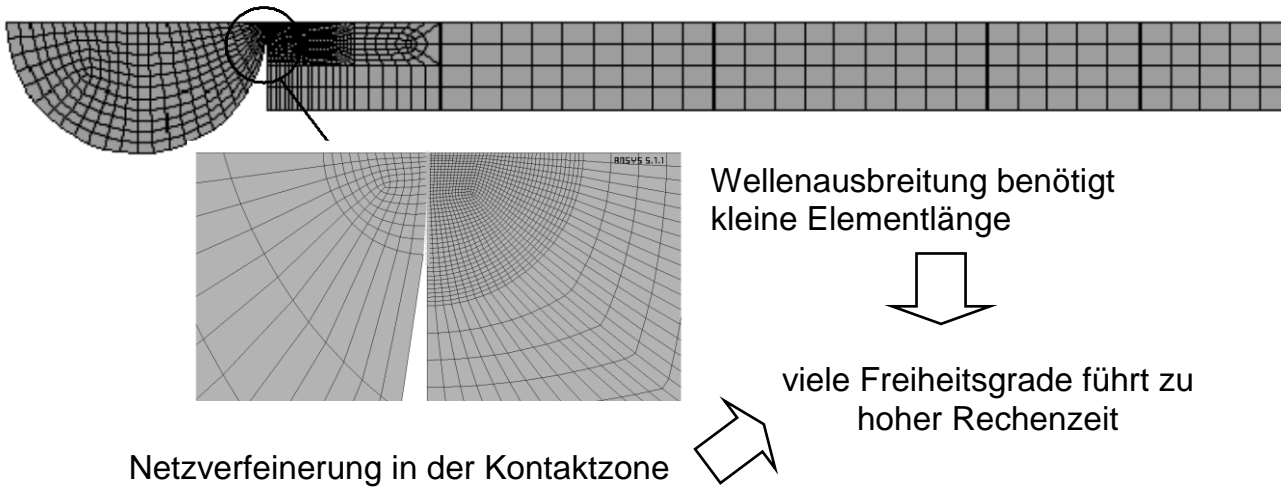
A : Querschnittsfläche,
 E : E-modul
 ρ : Dichte

[Wave Motion in Elastic Solids, Graff, 1975]

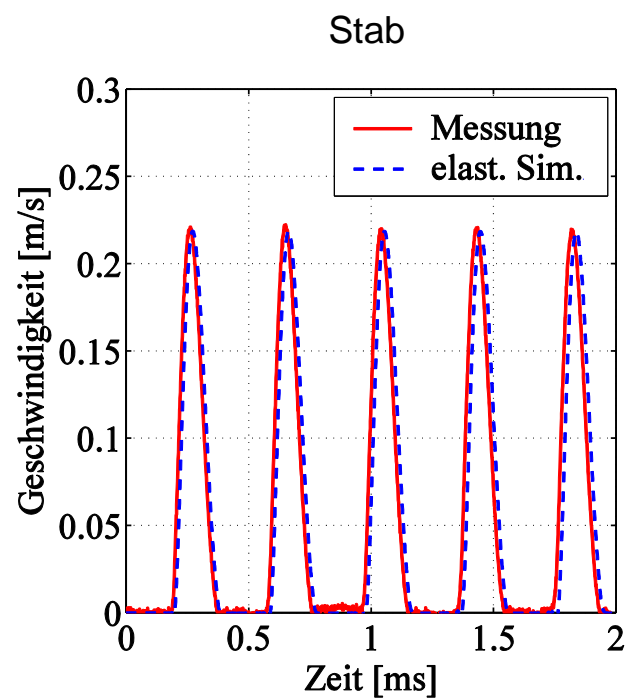
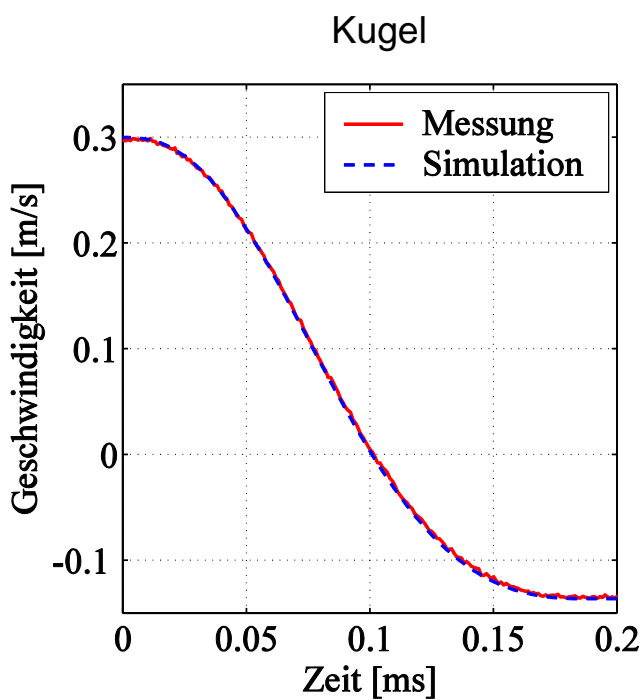




Modellierung von Stoßproblemen mit nichtlinearer FEM

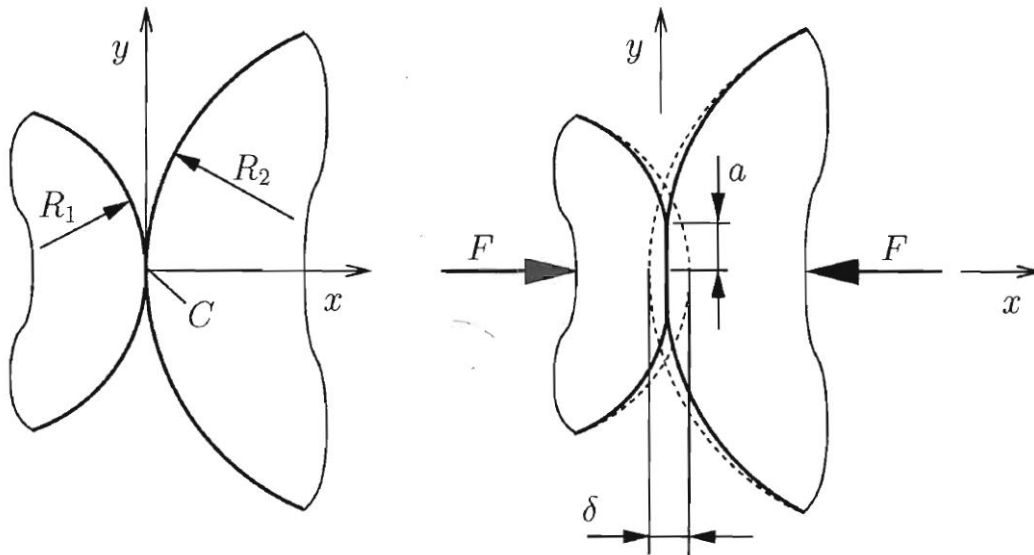


Vergleich von Messung und Simulation

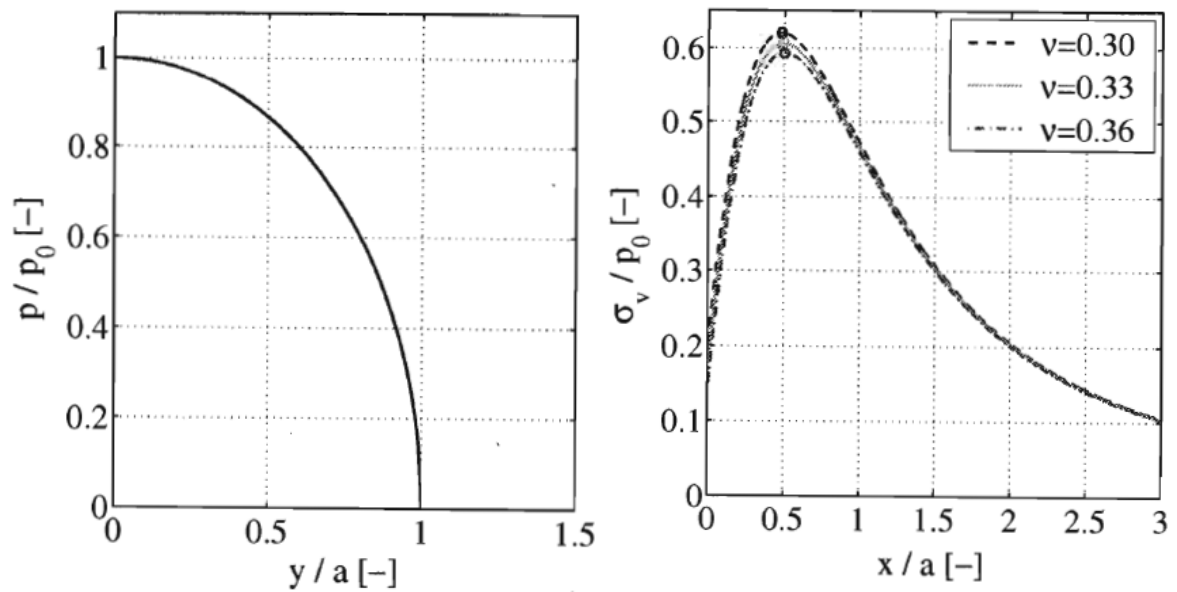




Herztsches Kontaktgesetz



Rotationssymmetrischer Hertzscher Kontakt



Normierte Verteilung der Flächenpressung (links) und der von Mises Vergleichsspannung entlang der Symmetrieachse (rechts) für den Hertzschen Kontakt

Formelzeichen	Erklärung
f	Anzahl der Freiheitsgrade (FHG)
p	Anzahl der Körper
q	Anzahl der Bindungen
r_{xi}, r_{yi}, r_{zi}	translatorischen Koordinaten
$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$	rotatorische Koordinaten
\mathbf{r}_i	Ortsvektor (translatorischen Koordinaten)
\mathbf{S}_i	Drehmatrix (rotatorische Koordinaten)
\mathbf{x}_i	redundante Koordinaten
\mathbf{y}	Minimalkoordinaten / Verallgemeinerten Koordinaten
q	Zahl der voneinander unabhängigen Bindungen
b	Anzahl Bindungen
c_r	Bindungen /Zwangsbindungen
\mathbf{C}	Bindungsmatrix
\mathbf{K}_i	Körper
m	Masse
\mathbf{f}_i^r	Reaktionskräfte
\mathbf{l}_i^r	Reaktionsmomente
\mathbf{f}_i^e	eingeprägte Kräfte
\mathbf{l}_i^e	eingeprägte Momente
\mathbf{I}_i	Trägheitstensor
\mathbf{a}_i	Absolutbeschleunigung des Schwerpunkts
$\boldsymbol{\omega}_i$	absolute Winkelgeschwindigkeit
$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$	absolute Winkelgeschwindigkeit als Matrix „Rösselsprung“
$\boldsymbol{\alpha}_i$	absolute Winkelbeschleunigung
t	Zeit
$\delta \mathbf{s}_i$	virtuellen Verdrehungen
$\delta \mathbf{r}_i$	virtuellen Verschiebungen
δ	Differentialoperator bei festgehaltener Zeit t
λ	Lagrange Multiplikation
δW^r	virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte und -Momente
δP^r	virtuelle Leistung der Reaktionskräfte und -Momente
$\delta \mathbf{v}_i, \delta \boldsymbol{\omega}_i$	virtuelle Geschwindigkeiten
\mathbf{J}_{Ti}	Jacobi-Matrix der Translation
\mathbf{J}_{Ri}	Jacobi-Matrix der Rotation
$\bar{\mathbf{v}}_i$	lokale Geschwindigkeit (Translation)
$\bar{\boldsymbol{\omega}}_i$	lokale Geschwindigkeit (Rotation)
$\bar{\mathbf{a}}_i$	lokale Beschleunigung (Translation)
$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i$	lokale Beschleunigung (Rotation)
\mathbf{M}	Massenmatrix
\mathbf{k}	Vektor der verallgemeinerten Zentrifugal-, Kreisel und Corioliskräfte

\mathbf{q}	verallgemeinerten eingepprägten Kräfte
ξ	Zustandsvektor
\mathbf{z}	verallgemeinerte Geschwindigkeit
\mathbf{Z}	Kinematik Matrix
\mathbf{L}_{Ti}	Jacobi-Matrix der Translationsgeschwindigkeit
\mathbf{L}_{Ri}	Jacobi-Matrix der Rotationsgeschwindigkeit
n_c	Anzahl Schleifenschließbedingungen
\mathbf{E}	Einheitsmatrix
$\bar{\mathbf{J}}$	Jacobi Matrix auf Beschleunigungsebene
γ	
\mathbf{q}_i^c	verallgemeinerte Corioliskräfte
\mathbf{q}_i^e	verallgemeinerte eingepprägte Kräfte
\mathbf{q}_i^r	verallgemeinerte Reaktionskräfte
$\varphi_i, \chi_i, \psi_i$	Euler Winkel
f	Funktion
h	Zeitschritt
s	Stützstellen
\bar{f}	geometrische Bewegungsrichtungen
k	Bewegungsrichtungen
\mathbf{a}_i	gesperrte Richtungen
\mathbf{A}	Matrix der gesperrten Richtungen
\mathbf{g}_i	freie Geschwindigkeiten
\mathbf{G}	Matrix der freien Geschwindigkeiten
r	Radius
$\phi_t^{g_i}$	Fluss
D	Differentialoperator
Δ_i	Lageänderung?
P	Punkt
\mathbf{R}	Referenzposition
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
Ω_0	Referenzkonfiguration
Ω	aktuelle Konfiguration
\mathbf{G}	Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor
\mathbf{F}	Deformationsgradient
$\Delta\mathbf{F}$	Verschiebungsgradient
ϵ_{ij}	linearer Verzerrungstensor
$\hat{\mathbf{G}}$	unabhängige Einträge der Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor
$\hat{\epsilon}$	unabhängige Einträge des linearisierten Verzerrungstensor
\mathbf{L}_L	Matrix Differentialoperatoren ? linearer Operator
\mathbf{L}_N	Matrix Differentialoperatoren ?

df	
da	
σ	Spannungsvektor
\mathbf{n}	Orientierung der Schnittfläche
\mathbf{T}	Cauchy Spannungstensor
dA	
\mathbf{N}	Normalenrichtung
\mathbf{P}_1	1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
\mathbf{P}_2	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor (symmetrische Modifikation)
$\widehat{\mathbf{P}}_2$	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor (symmetrische Modifikation) zusammengefasst
μ	Lamé-Konstante
λ	Lamé-Konstante
E	Elastizitätsmodul
ν	Poissonzahl
$\widehat{\mathbf{C}}$	Tensor zweiter Stufe (Bindungsmatrix)
ρ_0	Dichte der Referenzkonfiguration
ρ	Dichte der aktuellen Konfiguration
b_0	Volumenkräfte
$\bar{\mathbf{u}}$	Verschiebungsrandbedingung
$\bar{\mathbf{p}}$	Spannungsrandbedingung (Oberflächenspannung)
δW_t	virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte
δW_i	virtuelle Arbeit der inneren Kräfte
δW_e	virtuelle Arbeit der eingepprägten Volumen und Oberflächenkräfte
$\delta \widehat{\mathbf{G}}$	virtuelle Verzerrungen
$\delta \mathbf{u}$	virtuelle Verschiebungen
\mathbf{b}	
\mathbf{N}^j	Matrix der Ansatz-/ und Formfunktionen
\mathbf{q}^j	Knotenpunktverschiebung (zeitabhängig)
\mathbf{B}^j	Verzerrungsmatrix (Differentiation von \mathbf{N}^j)
\mathbf{K}^j	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{F}^j	Kräfte der Streckenlast und Randlasten
w'	Neigung
w	Durchbiegung
ε_x	Dehnung
$\delta W_{m,t}$	virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte bezüglich der Translation?
$\delta W_{m,r}$	virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte bezüglich der Rotation?
I	Flächenträgheitsmoment
c_i	Integrationskonstanten

L	Länge
A	Fläche
\mathbf{q}_u	unbekannte Verschiebungen
\mathbf{q}_v	bekannte Verschiebungen aus Bindungen
\mathbf{D}	viskoser Dämpfung
$\mathbf{r}(\mathbf{q})$	Vektoren der Knotenkräfte, welche aus den Elementspannungen folgen
\mathbf{f}	Kraftvektor
\mathbf{r}	Positionsvektor in der definierten Konfiguration
\mathbf{x}	Positionsvektor in der undefinierten Konfiguration
\mathbf{P}_k	polynomiale Basis (ANCF)
\mathbf{a}_k	zeitabhängige Polynomkoeffizienten
$\hat{\mathbf{F}}$	Vektor der äußeren Kräfte und Momente
$\delta W_{e,s}$	Virtuelle Arbeit der eingprägten Einzelkräfte
$\delta W_{e,b}$	Virtuelle Arbeit der eingprägten Volumenkräfte
\mathbf{e}^i	Elementkoordinaten
\mathbf{B}^i	Boolsche Matrix
\mathbf{e}	verallg. Koordinaten des flexiblen Körpers
K_I	Inertialsystem
K_R	bewegtes Referenzsystem
\mathbf{S}_{IR}	orthogonale Transformationsmatrix
Φ_P	globale Ansatzfunktion für elastische Verbindungen
\mathbf{q}	elastische Koordinaten
$\hat{\mathbf{S}}_{RP}$	konstanter Anteil der Transformationsmatrix
Θ_P	Transformation abhängig von elastischen Koordinaten zwischen elastischen Rotationen
ϑ_P	Drehvektor
Ψ_P	Ansatzfunktionen für elastische Rotation
$\tilde{\mathbf{T}}_{RP}$	
\mathbf{T}_{RP}^t	
\mathbf{T}_{RP}^r	
\mathbf{S}_{RP}^t	
\mathbf{S}_{RP}^r	
$\mathbf{z}_I, \mathbf{z}_{II}, \mathbf{z}_{III}$	
β_{IR}	Orientierung des Referenzsystems
\mathbf{M}_e	Massenmatrix aus elastischen Anteilen
$\mathbf{C}_t, \mathbf{C}_r$	Kopplungsterme (Referenzbewegung mit elast. Koordinaten)
\mathbf{h}_ω	Vektor der Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte (kann in den translatorischen, rotatorischen Anteil und einen Anteil aus elastischen Koordinaten aufgeteilt werden)
\mathbf{G}_e	

\mathbf{O}_e^k	
\mathbf{K}_e	
$\bar{\mathbf{K}}_e$	
\mathbf{N}_N	
\mathbf{N}_L	
δW_e	Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte
\mathbf{h}_e	Vektor der inneren Kräfte
δW_p	Virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte (Oberflächenspannung)
\mathbf{h}_p	Vektor der Oberflächenkräfte (Oberflächenspannung)
δW_d	Virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte (Einzelkräfte/Momente)
\mathbf{h}_d	Vektor der Oberflächenkräfte (Einzelkräfte/Momente)
δW_b	Virtuelle Arbeit der Volumenkräfte
\mathbf{h}_b	Vektor der Volumenkräfte
\mathbf{h}_a	Vektor der Kräfte eines freien Körpers?
\mathbf{b}	Gravitation
Φ_i	Eigenform
\mathbf{q}_i	modale Koordinaten
\mathbf{V}	Projektionsmatrix
$\bar{\Phi}, \bar{\Psi}$	reduzierte globale Ansatzfunktionen
ε	Residuum
\mathbf{e}	Fehler
ω_i	
ϕ	Eigenvektor
\mathbf{H}	Übertragungsfunktion
\mathbf{T}_j^{sk}	Momente (Krylor-Unterräume)
\check{s}	$s - s_K$ (Krylor-Unterräume)
\mathbf{P}	Gramsche Steuerbarkeitsmatrix
\mathbf{Q}	Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix
$\mathbf{A}, \mathbf{B}_f, \mathbf{C}_f, \mathbf{D}$	Parameter vom LTI-System
σ_k	Hankelsingulärwert
λ_k	Eigenwerte
\mathbf{H}_ε	Fehler des reduzierten Systems
\mathbf{Q}_i	Verteilungsmatrix der Reaktionskräfte
\mathbf{p}_s	Anzahl der starren Körper
\mathbf{p}_e	Anzahl der elastischen Körper
$\bar{\mathbf{y}}_i$	lokale Geschwindigkeit (starre und elastische Körper)
$\bar{\boldsymbol{\beta}}_i$	lokale Beschleunigung (starre und elastische Körper)
\mathbf{J}_{Ei}	Jacobimatrix der elastischen Deformation
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_p$	Spannung am Punkt (Knoten) P

\hat{c}	Materialmatrix
-----------	----------------



Neweul-M²

Simulation of Multibody Systems using Neweul-M²

When analyzing, simulating and optimizing multibody systems, it is often advantageous to have the equations of motion in symbolic form. While for small systems, the derivation of the equations of motion can be done easily by hand, it can get very hard to do so for more sophisticated systems with several degrees of freedom. Therefore, the software Neweul-M² has been developed at the Institute of Engineering and Computational Mechanics. It is based on Matlab's Symbolic Toolbox which allows symbolic algebraic computations within Matlab. Neweul-M² is able to derive the symbolic equations of motion of tree-structured holonomic rigid and flexible multibody systems automatically. Further, a symbolic linearization of the equations of motion with respect to an arbitrary symbolic reference motion is provided, which can be helpful for the analysis and optimization of vibration problems. For the Matlab-based simulation of multibody systems, various functions for the numerical evaluation of the nonlinear and linearized equations of motions and kinematic properties are provided. The equations of motion can also be easily exported to Simulink.

Getting Started: Step-by-Step

A detailed description of Neweul-M² can be found in the Institute-Wiki:

www.itm.uni-stuttgart.de/itmwiki/index.php/Neweulm2

To make the entrance easier a step-by-step documentation has been created. For most users the best way to call Neweul-M² is to use the server version. In order to make all Neweul-M² functions available in Matlab you have to type:

```
addpath(genpath('/home/itm/itmsw/neweulm2/currentVersion/neweulm2/'));
```

You can add this line to the file `~/matlab/startup.m` which is executed at each start of Matlab. When using the server version you can store the model folders with your input or simulation data and all the routines stay on the server.

The best way getting started with Neweul-M² is to copy the examples folder to your account or a scratch partition on your PC by entering the following command:

```
cp -r /home/itm/itmsw/neweulm2/currentVersion/examples/ .
```

By this you will get three examples, two for input files and one for the graphic user interface (GUI). In the folder *sandbox/* you will find a file called **Readme.txt** giving you an explanation on how to get started. To start the GUI, please call the file **link_neweulm2.m** in Matlab, which you find in the *sandbox/* folder. An additional example of a flexible multibody system can be found under:

```
cp -r /home/itm/itmsw/neweulm2/models/presentation_elastic/ .
```



Symbolical and Numerical calculations

Neweul-M² calculates the equations of motion symbolically. This means it uses names like **m1** for the parameters and not numbers **5 [kg]** to set up the equations. This has several advantages, allowing the user to read and understand the expressions and allowing an explicit formulation. Also you can change values without recalculating the equations of motion. As not everything can be done symbolically (e.g. SID-file), the numbers come in at some point in the simulation. But always when you have two uses (symbolic and numeric) of the same things, there are some problems. To keep these as small as possible the complete data is stored in two ways simultaneously:

- the symbolic expressions are stored in the structure `sys`, available in the workspace.
- files containing source code, which will evaluate numerical values.

Even if you only want the files to calculate numerical values, it might be good to save the system after modelling. When doing so in the menu of the GUI, it will save the figure and the data structure containing the symbolic expressions. The advantage is that you can load the data structure, change something and recreate the files. If you forgot to save before closing or the program crashed, you can still hope for the autosave. Every few minutes, your system is saved automatically to `examples/sandbox/autosave.mat`. In this case you should make a copy of the `autosave` files, otherwise they might be overwritten, and the next time you do anything in Neweul-M².

Structure of the Software

The software consists of two main parts, one for the definition of the system and the derivation of the equations of motion, the other one provides functions for the numerical analysis, simulation and optimization of multibody systems. All files building the software are stored in a directory called Neweul-M², the modelspecific data is stored to a separate model directory. It contains all files being necessary for the system's definition and performing simulations.

File / Directory	Contents of each model folder
<code>sysFunctions/</code>	Directory containing functions for numerical evaluation of the equations of motion
<code>userFunctions/</code>	Directory containing functions for numerical evaluation of user defined time-variant variables
<code>defineGraphics.m</code>	Definition of graphical representation of bodies
<code>initOpt.m</code>	Script for initializing parameter optimizations
<code>setUserVar.m</code> (optional)	Definition of constant user-defined variables
<code>startSysDef.m</code>	Script for system definition and derivation of equations of motion
<code>sys.fig</code> (optional)	Graphical representation of system for animation
<code>sys.mat</code> (optional)	Stored system data structure



sysDef.m	System definition
----------	-------------------

Before running simulations, the system has to be defined and the equations of motion have to be derived. All necessary steps for this are summarized in the script startSysDef.

Call	Action
sysDef	Definition of multibody system
calcEqMotNonLin	Derivation of nonlinear equations of motion
writeMbsNonLin	Generation of matlab-functions for numerical evaluation of nonlinear equations of motion (stored in sysFunctions/)
calcEqMotLin	Linearisation of equations of motion
writeMbsLin	Generation of Matlab-functions for numerical evaluation of linearised equations of motion
setUserVar	Assigning numerical values to userdefined variables
defineGraphics	User-defined script defining all shapes in the animation window
save	Storing model data structure in sys.mat

After these steps the system will be fully defined and ready for simulations. Neweul-M² offers a few possibilities to perform simulations and analysis of the system.

Call	Action
newOpt	Perform a sensitivity analysis or parameter optimization of the system. There are several methods available to formulate the criterion and to calculate sensitivities. Options can be set in initOpt.m.
runKiAn	Perform a kinematic analysis, prescribing a function for every independent generalized coordinate. Options and parameters are set in the same file.
runModalAnalysis	Perform a modal analysis of the linearized system. Options and parameters are set in the same file.
runTimeInt	Run a time integration of the equations of motion. Options and parameters are set in the same file.



Graphical User Interface

A graphic user interface (GUI) can be found in `neweulm2/gui/`, which has been created with the Matlab GUI layout editor guide. It is created not independently but as a front-end to the existing version, which is controlled with input files. Therefore, it calls the same functions for the actual modeling and simulation. It is started by calling `neweulm2/gui/startneweulm2.m` or by typing `neweulm2` directly. The file `examples/sandbox/link_neweulm2.m` is a link which can be used to start the GUI as well. If still this is not convenient for you, you can call the function `writeneweulm2link.m` after starting the GUI. This will create a file also called `link_neweulm2.m`, but this time with the absolute path stored inside, therefore able to start the GUI from any given folder. Many of the input files can be created from the GUI under the menu entry `Export System` to ensure compatibility in both ways. Using the command `neweulm2` you can switch seamlessly between input files and graphical user interface.

Entwicklung der Lageänderung in eine Taylor-Reihe 2. Ordnung für h 1

$$0 \leq t \leq h: \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}_1(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

$$\rightarrow \mathbf{y}(t_0 + h) = \mathbf{y}(t_0) + \left. \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right|_{t_0} h + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} \right|_{t_0} h^2 + \dots$$

$t_0 = 0$ $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}_1$ $\ddot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{g}}_1 = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} = : D\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1$

$$\rightarrow \mathbf{y}_1 \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{10} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} h^2$$

$$h \leq t \leq 2h: \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}_2(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(h) = \mathbf{y}_1$$

$$\rightarrow \mathbf{y}_2 \approx \mathbf{y}_1 + \mathbf{g}_{21} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{21} \mathbf{g}_{21} h^2$$

$\hookrightarrow = \frac{1}{2} D\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) \mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) h^2 \approx \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} h^2$
 $\hookrightarrow = \mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{10} h + \dots) h \approx \left(\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}_0} (\mathbf{g}_{10} h) \right) h$
 $\qquad = \mathbf{g}_{20} h + D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} h^2$

$$\approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{10} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} h^2$$

$$\approx \mathbf{y}_0 + (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20}) h + \left(\frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} + D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} \right) h^2$$

$$2h \leq t \leq 3h: \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{g}_1(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(2h) = \mathbf{y}_2$$

$$\rightarrow \mathbf{y}_3 \approx \mathbf{y}_2 - \mathbf{g}_{12} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{12} \mathbf{g}_{12} h^2$$

$\hookrightarrow \frac{1}{2} D\mathbf{g}_1(\mathbf{y}_0 + \dots) \mathbf{g}_1(\mathbf{y}_0 + \dots) h^2 \approx \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} h^2$
 $\hookrightarrow = -\mathbf{g}_1(\mathbf{y}_0 + (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20}) h + \dots) \approx -\mathbf{g}_{10} h - D\mathbf{g}_{10} (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20}) h^2$

$$\approx \mathbf{y}_0 + (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20} \dots) h + \left(\frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} + D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} \right) h^2$$

$$\rightarrow \mathbf{y}_3 \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{20} h + (D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} - D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{20}) h^2$$

$$3h \leq t \leq 4h: \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{g}_2(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(3h) = \mathbf{y}_3$$

$$\rightarrow \mathbf{y}_4 \approx \mathbf{y}_3 - \mathbf{g}_{23} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{23} \mathbf{g}_{23} h^2$$

$\hookrightarrow \frac{1}{2} D\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) \mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) h^2 \approx \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} h^2$
 $\hookrightarrow = -\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{20} h \dots) h \approx -\mathbf{g}_{20} h - D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} h^2$

$$\approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{20} h + (D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} - D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{20}) h^2$$

$$\approx \mathbf{y}_0 + \underbrace{(D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} - D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{20})}_{\mathbf{g}^*} h^2$$

$\mathbf{g}^* := [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$ Lie-Klammer ergibt Lageänderung

Entwicklung der Lageänderung in eine Taylor-Reihe 2. Ordnung für h 1

$$0 \leq t \leq h: \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}_1(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

$$\rightarrow \mathbf{y}(t_0 + h) = \mathbf{y}(t_0) + \left. \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right|_{t_0} h + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} \right|_{t_0} h^2 + \dots$$

$$\begin{array}{l} \downarrow t_0 = 0 \quad \swarrow \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}_1 \quad \searrow \ddot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{g}}_1 = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} = : D\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 \\ \rightarrow \mathbf{y}_1 \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{10} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} h^2 \end{array}$$

$$h \leq t \leq 2h: \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}_2(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(h) = \mathbf{y}_1$$

$$\rightarrow \mathbf{y}_2 \approx \mathbf{y}_1 + \mathbf{g}_{21} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{21} \mathbf{g}_{21} h^2$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \rightarrow \frac{1}{2} D\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) \mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) h^2 \approx \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} h^2 \\ \rightarrow \mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{10} h + \dots) h \approx \left(\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}_0} (\mathbf{g}_{10} h) \right) h \\ \quad \quad \quad = \mathbf{g}_{20} h + D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} h^2 \\ \rightarrow \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{10} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} h^2 \end{array}$$

$$\approx \mathbf{y}_0 + (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20}) h + \left(\frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} + D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} \right) h^2$$

$$2h \leq t \leq 3h: \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{g}_1(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(2h) = \mathbf{y}_2$$

$$\rightarrow \mathbf{y}_3 \approx \mathbf{y}_2 - \mathbf{g}_{12} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{12} \mathbf{g}_{12} h^2$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \rightarrow \frac{1}{2} D\mathbf{g}_1(\mathbf{y}_0 + \dots) \mathbf{g}_1(\mathbf{y}_0 + \dots) h^2 \approx \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} h^2 \\ \rightarrow -\mathbf{g}_1(\mathbf{y}_0 + (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20})h + \dots) \approx -\mathbf{g}_{10} h - D\mathbf{g}_{10} (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20} h^2) \\ \rightarrow \approx \mathbf{y}_0 + (\mathbf{g}_{10} + \mathbf{g}_{20})h + \left(\frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} + D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} \right) h^2 \end{array}$$

$$\rightarrow \mathbf{y}_3 \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{20} h + (D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} - D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{20}) h^2$$

$$3h \leq t \leq 4h: \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{g}_2(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(3h) = \mathbf{y}_3$$

$$\rightarrow \mathbf{y}_4 \approx \mathbf{y}_3 - \mathbf{g}_{23} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{23} \mathbf{g}_{23} h^2$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \rightarrow \frac{1}{2} D\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) \mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \dots) h^2 \approx \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} h^2 \\ \rightarrow -\mathbf{g}_2(\mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{20} h + \dots) h \approx -\mathbf{g}_{20} h - D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} h^2 \\ \rightarrow \approx \mathbf{y}_0 + \mathbf{g}_{20} h + (D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{20} - D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{20}) h^2 \\ \approx \mathbf{y}_0 + (D\mathbf{g}_{20} \mathbf{g}_{10} - D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{20}) h^2 \end{array}$$

$\mathbf{g}^* := [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$ Lie-Klammer ergibt Lageänderung