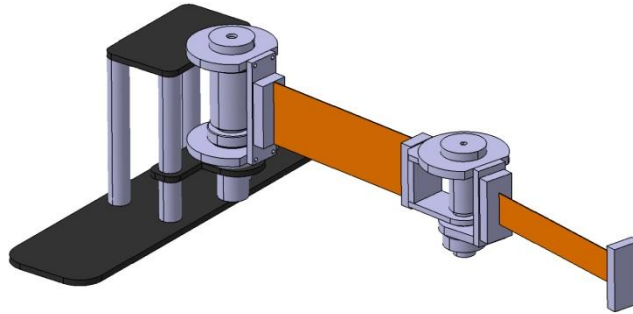


## Regelung flexibler Mehrkörpersysteme

Geregelte flexible Mehrkörpersysteme sind typische unteraktuierte Mehrkörpersysteme, da weniger Stellgrößen  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  als verallgemeinerte Koordinaten  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^f$  vorliegen ( $m < f$ ). Im Allgemeinen haben bei flexiblen MKS die elastischen Koordinaten  $\mathbf{y}_e \in \mathbb{R}^{f_e}$  keinen oder nur sehr wenige Stelleingriffe (z.B. durch Piezoaktuatoren).



Bewegungsgleichungen in partitionierter Form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{se} \\ \mathbf{M}_{se}^T & \mathbf{M}_{ee} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_s \\ \dot{\mathbf{y}}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_s \\ \mathbf{k}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e + \mathbf{K}_{ee} \cdot \mathbf{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_s \\ \mathbf{q}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s \\ \mathbf{B}_e \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

Verallgemeinerte Koordinaten:  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_s \ \mathbf{y}_e] \in \mathbb{R}^f$  mit  $\mathbf{y}_s \in \mathbb{R}^{f_s}$  und  $\mathbf{y}_e \in \mathbb{R}^{f_e}$

End-Effektor Position:  $\mathbf{r}^{EF} = \mathbf{r}^{EF}(\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_e)$  (2)

Sollbahn:  $\mathbf{r}_d^{EF}$  2-mal stetig differenzierbar

### Annahmen für weitere Betrachtung

- Es liegen so viele Stellgrößen wie Starrkörperfreiheitsgrade vor, d.h.  $\mathbf{u}, \mathbf{y}_s, \mathbf{r}^{EF} \in \mathbb{R}^m$
- Die Stellgrößen  $\mathbf{u}$  wirken an den Gelenken (typischer elastischer Roboter)
- Das flexible MKS wird mit einem Tangentensystem modelliert, somit wird bei einem System in Baumstruktur  $\mathbf{B}_s = \mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}_e = \mathbf{0}$ .

**Vorgehen:** Reglerentwurf mit zwei Entwurfsfreiheitsgraden (Vorsteuerung+Regler)

- Vorsteuerung basierend auf starrem MKS führt zu inakzeptablen Schwingungen
- Beim Vorsteuerungsentwurf für flexible MKS müssen Inverse Kinematik und Inverse Dynamik im Allgemeinen gemeinsam betrachtet werden, da die nichtlineare Gleichung  $\mathbf{r}^{EF}(\mathbf{y}_{s,d}, \mathbf{y}_{e,d}) = \mathbf{r}_d^{EF}$  einerseits unterbestimmt ist und andererseits die Lösung  $\mathbf{y}_{s,d}, \mathbf{y}_{e,d}$  die Bewegungsgleichung (1) erfüllen muss.

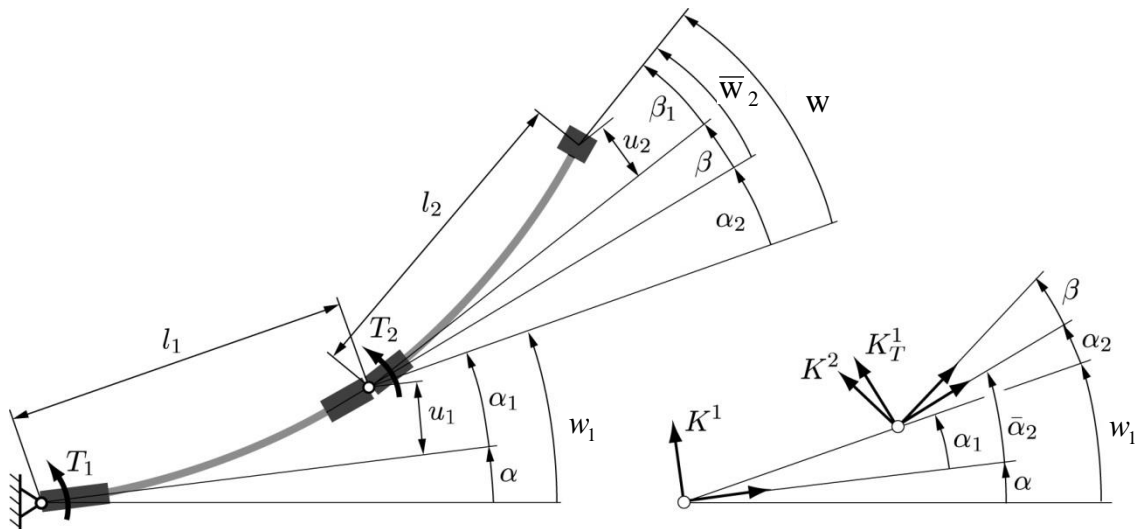
## Vorsteuerungsentwurf durch exakte Modellinversion

Ein exaktes inverses Modell kann mit denselben differential-geometrischen Ansätzen wie die exakte Zustandslinearisierung erhalten werden. Hierzu wird die Bewegungsgleichung (1) zunächst mittels Koordinatentransformation in Koordinaten des Systemausgangs überführt. Hieraus lässt sich dann einfach ein inverses Modell ableiten.

### 1. Definition eines geeigneten Systemausgangs

Zur Vereinfachung der Koordinatentransformation bietet sich bei elastischen Robotern oft an einen neuen linear kombinierten Systemausgang  $\mathbf{w} = \mathbf{y}_s + \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{y}_e$  mit konstanter Gewichtungsmatrix  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{m \times f_e}$  zu definieren. Dieser neue Systemausgang kann als Hilfswinkel aufgefasst werden.

**Beispiel:** elastischer 2-Arm Roboter



$$\mathbf{r}^{\text{ef}}(\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_e) \approx \bar{\mathbf{r}}^{\text{ef}}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(w_1) + l_2 \cos(w_1 + w_2) \\ l_1 \sin(w_1) + l_2 \sin(w_1 + w_2) \end{bmatrix} \quad (3)$$



## 2. Koordinatentransformation

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ mit } \mathbf{x} = [\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{y}}_s, \dot{\mathbf{y}}_e]^T \quad \mathbf{z} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) \text{ mit } \mathbf{z} = [\mathbf{w}, \mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{w}}, \dot{\mathbf{y}}_e]^T$$

Zur Koordinatentransformation müssen in der Bewegungsgleichung (1) die Starrkörperkoordinaten ersetzt werden, d.h.  $\mathbf{y}_s = \mathbf{w} - \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{y}_e$ ,  $\dot{\mathbf{y}} = {}_s\dot{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\Gamma} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e$  und  $\ddot{\mathbf{y}} = {}_s\ddot{\mathbf{w}} - \boldsymbol{\Gamma} \cdot \ddot{\mathbf{y}}_e$ . Nach Umformung ergibt sich die Bewegungsgleichung in neuen Koordinaten:

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \dot{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{k}} + \mathbf{u} \quad (4)$$

$$(\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_e = \mathbf{q}_e - \mathbf{k}_e - \mathbf{K}_{ee} \cdot \mathbf{y}_e - \mathbf{D}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{k}} + \mathbf{u}) \quad (5)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{ss} - (\mathbf{M}_{se} - \mathbf{M}_{ss} \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot (\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma})^{-1} \cdot \mathbf{M}_{se}^T$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_s - (\mathbf{M}_{se} - \mathbf{M}_{ss} \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot (\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma})^{-1} \cdot \mathbf{q}_e$$

$$\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k}_s - (\mathbf{M}_{se} - \mathbf{M}_{ss} \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot (\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma})^{-1} \cdot (\mathbf{k}_e + \mathbf{K}_{ee} \cdot \mathbf{y}_e + \mathbf{D}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e)$$

## 3. Inverses Modell

Die Bewegungsgleichungen (4-5) sind nun geeignet, um ein inverses Modell herzuleiten. Die Solltrajektorien des neuen Ausgangs  $\mathbf{w}_d, \dot{\mathbf{w}}_d$  können mit (3) mittels einer inversen Kinematik bestimmt werden.

Die benötigten Stellkräfte folgen dann aus (4)

$$\mathbf{u}_d = \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{w}_d, \mathbf{y}_e) \cdot \dot{\mathbf{w}}_d + \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{w}_d, \mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{w}}_d, \dot{\mathbf{y}}_e) - \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{w}_d, \mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{w}}_d, \dot{\mathbf{y}}_e) \quad (6)$$

Hierbei sind die Trajektorien der elastischen Koordinaten  $\mathbf{y}_e, \dot{\mathbf{y}}_e$  unbekannt. Mit (5) unter Verwendung von (6) folgt hierfür die Differentialgleichung

$$(\mathbf{M}_{ee} - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_e = \mathbf{q}_e - \mathbf{k}_e - \mathbf{K}_{ee} \cdot \mathbf{y}_e - \mathbf{D}_{ee} \cdot \dot{\mathbf{y}}_e - \mathbf{M}_{se}^T \cdot \dot{\mathbf{w}}_d \quad (7)$$

## Simulationsergebnisse

Trajektorienfehler für elastischen 2-arm Roboter

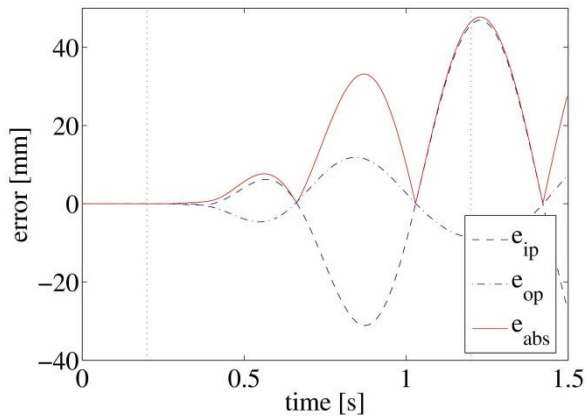


Bild 1: Vorsteuerung basierend auf starrem Modell

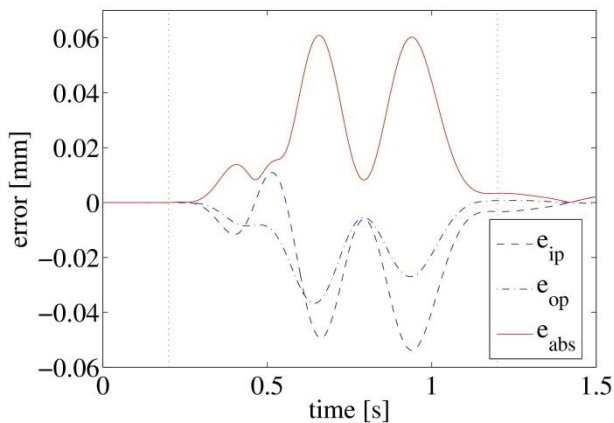


Bild 2: Exakt inverses Modell (instabile interne Dynamik, lösen eines Randwertproblems notwendig)

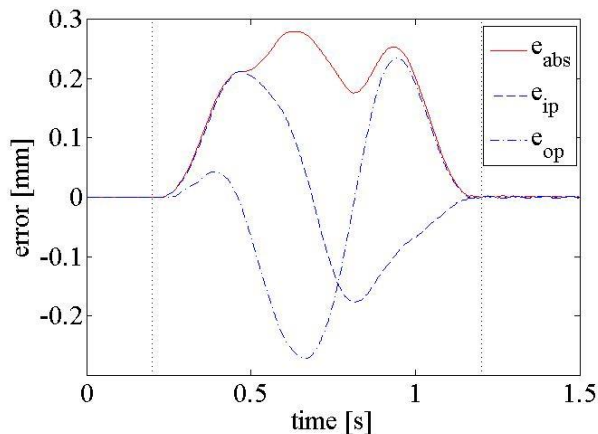


Bild 3: Optimiertes inverses Modell (stabile interne Dynamik, lösen durch Zeitintegration möglich)

## Literatur

- [1] Burkhardt, M. Model-Based Feed-Forward Control for Mechatronic Systems with Structural Elasticity Shaker Verlag, 2019.