Regelung starrer Mehrkörpersysteme

Typische Beispiele geregelter starrer Mehrkörpersysteme sind Roboter und Werkzeugmaschinen. Im Allgemeinen entspricht hier die Anzahl der Stellgrößen den Freiheitsgraden des Systems

Bewegungsgleichungen	$\mathbf{M}(\mathbf{y},\mathrm{t}) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\mathrm{t}) = \mathbf{q}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\mathrm{t}) + \mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}$	(1)
End-Effektor Position	$\mathbf{r}^{\mathrm{EF}} = \mathbf{r}^{\mathrm{EF}}(\mathbf{y})$	(2)
Sollbahn	$\mathbf{r}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{EF}}$ 2-mal stetig differenzierbar	
System ist voll aktuiert	$\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{r}^{\mathrm{EF}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{f}}$	

Die Reglerstruktur für starre MKS (im besonderen Roboter) besteht aus drei Teilen:

1. Inverse Kinematik
2. Inverse Dynamik
3. Rückführender Regler

Inverse Kinematik

Mit der Inversen Kinematik wird für eine gegeben Sollbahn $\mathbf{r}_\mathrm{d}^\mathrm{EF}$ des End-Effektors (Tool-Center Point) die dazugehörigen Trajektorien $\mathbf{y}$ (incl. $\dot{\mathbf{y}}_\mathrm{d}, \ddot{\mathbf{y}}_\mathrm{d}$) der verallgemeinerten Koordinaten berechnet.

$$\mathbf{r}^\mathrm{EF}(\mathbf{y}_\mathrm{d}) = \mathbf{r}_\mathrm{d}^\mathrm{EF} \;\Rightarrow \mathbf{y}_\mathrm{d} = \mathbf{r}^{\mathrm{EF}^{-1}}\left(\mathbf{r}_\mathrm{d}^\mathrm{EF}\right) \tag{3}$$

Die Inverse Kinematik kann auf unterschiedliche Weise geschehen, siehe [1,2]:

- algebraisches Lösen der nichtlinearen Gleichung (3)
- numerisches Lösen von (3), z.B. mit Newton-Raphson Verfahren
- differentielle Kinematik

Inverse Dynamik (Vorsteuerung, feedforward control)

Mit der Inversen Dynamik wird für gegebene $\mathbf{y}_\mathrm{d}, \dot{\mathbf{y}}_\mathrm{d}, \ddot{\mathbf{y}}_\mathrm{d}$ die dazugehörigen Stellgrößen $\mathbf{u}_\mathrm{d}$ berechnet. Dazu wird die Bewegungsgleichung (1) algebraisch aufgelöst:

$$\mathbf{u}_\mathrm{d} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y}_\mathrm{d})[\mathbf{M}(\mathbf{y}_\mathrm{d}, \mathrm{t}) \cdot \ddot{\mathbf{y}}_\mathrm{d} + \mathbf{k}(\mathbf{y}_\mathrm{d}, \dot{\mathbf{y}}_\mathrm{d}, \mathrm{t}) - \mathbf{q}(\mathbf{y}_\mathrm{d}, \dot{\mathbf{y}}_\mathrm{d}, \mathrm{t})] \tag{4}$$

Sind die Anfangsbedingungen $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(\mathrm{t}_0), \dot{\mathbf{y}}_0 = \dot{\mathbf{y}}(\mathrm{t}_0)$ des MKS mit denen der Sollbahnen $\mathbf{y}_\mathrm{d}(\mathrm{t}_0), \dot{\mathbf{y}}_\mathrm{d}(\mathrm{t}_0)$ identisch, die Modellparameter in (4) exakt bekannt und liegen keine externen Störungen vor, so folgt das MKS exakt den gewünschten Trajektorien $\mathbf{y}$ bzw. $\mathbf{r}_\mathrm{d}^\mathrm{EF}$.

Rückführender Regler (feedback control)

Da in der Realität immer Unsicherheiten und Störungen auftreten ist ein Regler zwingend notwendig. Eine gute Vorsteuerung trägt den Hauptteil der „Regelungsarbeit", der Regler muss dann nur kleine Fehler ausgleichen. Daher sind hier oft einfache Regler einsetzbar, z.B. PID-Regler, LQR (Linear Quadratic Regulator), …

PID-Regler: $\mathbf{u}_\mathrm{r} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{y}_\mathrm{d} - \mathbf{y}) + \mathbf{D} \cdot (\dot{\mathbf{y}}_\mathrm{d} - \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{I} \cdot \int (\mathbf{y}_\mathrm{d} - \mathbf{y})\mathrm{dt}$

Hierbei sind $\mathbf{P}, \mathbf{D}, \mathbf{I}$ f x f Diagonalmatrizen mit den Reglerverstärern.

Die Vorsteuerung und der Regler können weitergehend unabhängig von einander entworfen werden (Reglerstruktur mit zwei Entwurfsfreiheitsgraden).

Exakte Zustandslinearisierung (feedback linearization)

Eine Alternative zur obigen Regelungsstruktur ist die exakte Linearisierung durch nichtlineare Koordinatentransformation und Zustandsrückführung. Dies ist eine auf differentialgeometrischen Konzepten basierende Methode für allgemeine nichtlineare Systeme, siehe [3-5]. Die einfachste Anwendung dieses Verfahrens ist die Regelung starrer MKS (computed torque).

Der Reglerentwurf erfolgt hierbei in den Schritten:

1. Nichtlineare Koordinatentransformation der Systemgleichungen in Koordinaten des Systemausgangs (Eingangs-Ausgangs-Normalform). Da in der Bewegungsgleichung (1) die verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y}$ den Systemausgang bilden, ist (1) schon in der notwendigen Form.
2. Kompensation der Nichtlinearitäten in der Bewegungsgleichung (1) durch nichtlineare Zustandsrückführung der gemessenen Größen $\mathbf{y}$:
$$\mathbf{u} = {}_{\mathrm{f}}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y})[\mathbf{M}(\mathbf{y},\mathrm{t}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\mathrm{t}) - \mathbf{q}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\mathrm{t})] \qquad (5)$$
Hierbei stellt $\mathbf{v}$ einen neuen Systemeingang da.
3. Die Bewegungsgleichung (1) und das rückführende Gesetz (5) liefert ein exakt linearisiertes System:
$$\mathbf{M}(\mathbf{y},\mathrm{t}) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\mathrm{t}) = \mathbf{q}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\mathrm{t}) + \mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}_{\mathrm{f}}$$
$$\Rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{y},\mathrm{t}) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\mathrm{t}) = \mathbf{q}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\mathrm{t}) + \mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y})[\mathbf{M}(\mathbf{y},\mathrm{t}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\mathrm{t}) - \mathbf{q}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\mathrm{t})]$$
$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{v} \qquad (6)$$
4. Die Gleichung (6) stellt f Ketten von 2 Integratoren da. Diese linearen Subsysteme können nun über den neuen Systemeingang $\mathbf{v}$ mit linearen Reglern geregelt werden:
$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{y}}_{\mathrm{d}} + \mathbf{P}_1 \cdot (\dot{\mathbf{y}}_{\mathrm{d}} - \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{P}_0 \cdot (\mathbf{y}_{\mathrm{d}} - \mathbf{y}) \qquad (7)$$
Hierbei sind $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ f x f Diagonalmatrizen. Setzt man (7) in (6) ergibt sich mit dem Trajektorienfehler $\mathbf{e} = \mathbf{y}_{\mathrm{d}} - \mathbf{y}$ die Fehlerdynamik:
$$(\ddot{\mathbf{y}}_{\mathrm{d}} - \ddot{\mathbf{y}}) + \mathbf{P}_1 \cdot (\dot{\mathbf{y}}_{\mathrm{d}} - \dot{\mathbf{y}}) + \mathbf{P}_0 \cdot (\mathbf{y}_{\mathrm{d}} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{P}_1 \cdot \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0} \qquad (8)$$

Die Fehlerdynamik (8) sind f entkoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

$$\ddot{e} + P_1 \cdot \dot{e} + P_0 \cdot e = 0 \quad \text{für} \qquad i = 1(1)f \tag{9}$$

Es ist zu beachten, dass (9) der Schwingungsdiffrentialgleichung eines gedämpften Feder-Masse-Schwingers entspricht. Durch geeignete Wahl der Parameter P_0, P_1 kann dann eine gewünschte Dynamik des Trajektorienfehlers erreicht werden.

Literatur

[1] Spong, M.W.; Hutchinson, S.; Vidyasagar, M.: Robot Modeling and Control. John Wiley & Sons, 2006.

[2] Siciliano, B.; Sciavicco, L.; Villani, L.; Oriolo, G.: Robotics - Modelling, Planning and Control. London: Springer, 2010.

[3] Isidori, A.: Nonlinear Control Systems. London: Springer, 3 Edn., 1995.

[4] Sastry, S.: Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control. Interdisciplinary Applied Mathematics. New York: Springer, 1999.

[5] Slotine, J.J.; Li, W.: Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.