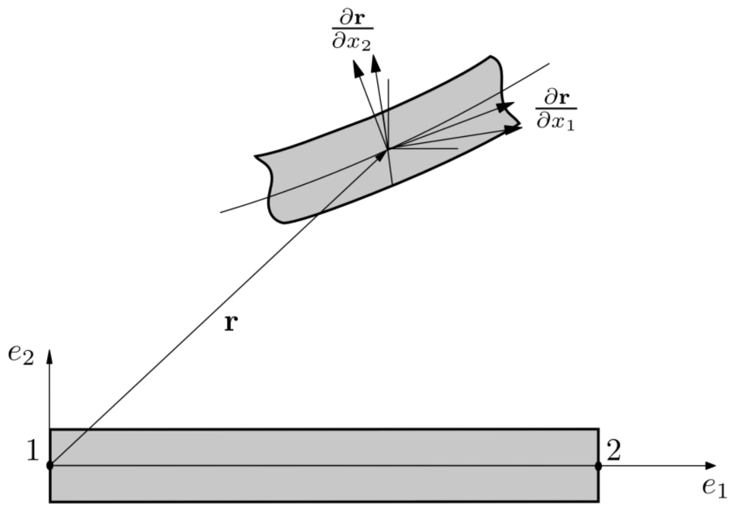
ANCF: Ansatzfunktionen eines 2D-Balkenelements

Darstellung des Positionsvektors mit dem Polynom

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{P}_2\mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2 + a_4x_1^2 + a_5x_1^3 \\ b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2 + b_4x_1^2 + b_5x_1^3 \end{bmatrix}$$



Ziel: Trennung der Variablen, d.h. darstellen des Positionsvektor als ein Produkt von ortsabhängigen Formfunktionen und zeitabhängigen Variablen:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{e}(t)$$

Transformation der Polynomkoeffizienten $\mathbf{a}(t)$ auf die Knotenkoordinaten $\mathbf{e}(t) = \mathbf{B}_p\mathbf{a}(t)$

Bedingungen am Knoten 1, $\mathbf{x} = [0 \quad 0]^T$:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_{,1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_{,2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}$$

Bedingungen am Knoten 2, $\mathbf{x} = [l \quad 0]^T$:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_7 \\ \mathbf{e}_8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_{,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_9 \\ \mathbf{e}_{10} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_{,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11} \\ \mathbf{e}_{12} \end{bmatrix}$$

Aus den Bedingungen an den Knoten 1 und 2 folgt:

$$\mathbf{B}_\mathrm{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{l} & 0 & 0 & \mathrm{l}^2 & \mathrm{l}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{l} & 0 & 0 & \mathrm{l}^2 & \mathrm{l}^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\mathrm{l} & 3\mathrm{l}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\mathrm{l} & 3\mathrm{l}^2 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{l} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mit der Transformationsmatrix $\mathbf{B}_\mathrm{p}$ und den dimensionslosen Koordinaten $\xi = \mathrm{x}_1/\mathrm{l}$ und $\eta = \mathrm{x}_2/\mathrm{l}$ ergibt sich die Matrix der Formfunktionen:

$$\mathrm{S(x)} = \mathrm{P(x)}\mathrm{B}_\mathrm{p}^{-1}$$

$$\mathrm{S} = [\mathrm{s}_1\mathrm{E} \quad \mathrm{s}_2\mathrm{E} \quad \mathrm{s}_3\mathrm{E} \quad \mathrm{s}_4\mathrm{E} \quad \mathrm{s}_5\mathrm{E} \quad \mathrm{s}_6\mathrm{E}], \qquad \mathrm{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei

$$\mathrm{s}_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad \mathrm{s}_2 = \mathrm{l}(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \quad \mathrm{s}_3 = \mathrm{l}(\eta - \eta\xi),$$

$$\mathrm{s}_4 = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad \mathrm{s}_5 = \mathrm{l}(-\xi^2 + \xi^3), \quad \mathrm{s}_6 = \mathrm{l}\eta\xi$$

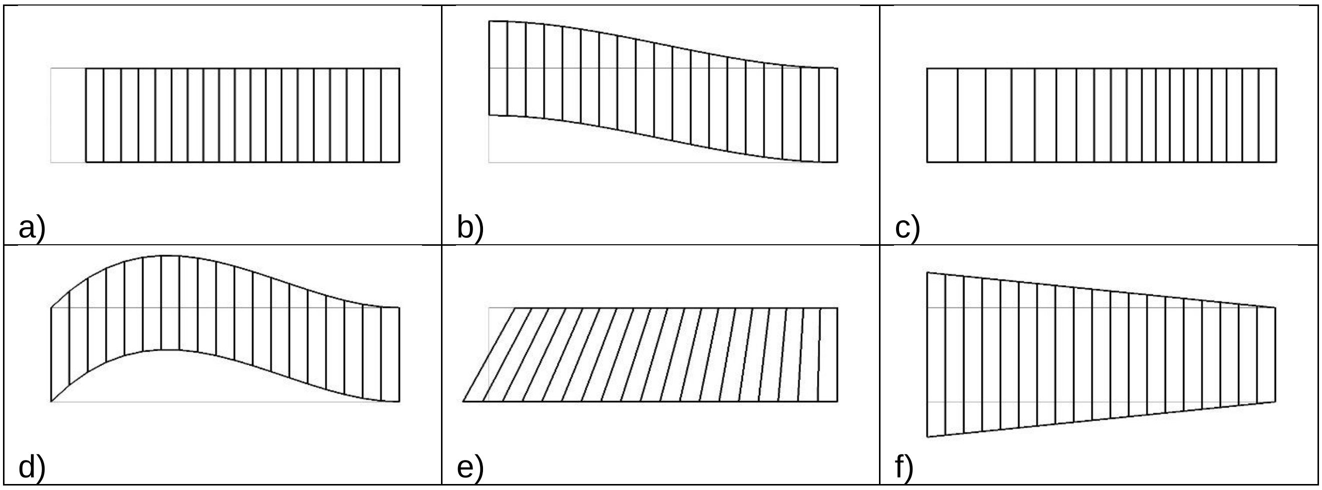


Abb.1: Die Abbildungen a) bis f) zeigen die Verschiebungsfelder bei Auslenkung der Knotenkoordinaten e_1 bis e_6.