Modellreduktion

Die Modellreduktion linearer Systeme ist heutzutage ein wichtiges Werkzeug zur effizienten Simulation komplexer technischer Systeme, siehe [1]. Sie findet Anwendung in der System- und Regelungstechnik, der Mikrosystemtechnik, der Elektrodynamik und der Mechanik. Dabei sollen die reduzierten Modelle die relevanten Eigenschaften sowie das Ein-/ Ausgangsverhalten der Originalsysteme für große Parameterbereiche möglichst gut und mit vorgegebener Fehlergüte annähern.

Eine schöne Einleitung zur Modellreduktion ist auch in Antoulas: „Approximation of Large-Scale Dynamical Systems“ [2] (Standardwerk zur Modellreduktion) zu finden.

In der angewandten Mathematik wurde in den letzten Jahren eine Reihe von neuen Modellreduktionsansätzen neben den traditionellen modalen Ansätzen entwickelt. In [2, 3, 4] wird ein guter Einblick in den aktuellen Stand der Forschung und die Zielrichtung zukünftiger Entwicklungen gegeben.

Prinzipiell gibt es drei Kategorien von Reduktionsverfahren, die relevant für die Modellreduktion elastischer Körper sind: modale Reduktionsverfahren, auf Gramschen Matrizen basierende Verfahren und Krylov-Unterraummethoden, siehe z.B. [5].

Mathematisches Schlüsselkonzept der Modelreduktion ist Projektion

Eine Matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{f\times f}$ wird Projektor auf den Unterraum $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^f$ genannt, wenn $\mathrm{im}(\mathbf{P}) = \mathcal{V}$ und $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

Daraus folgt, dass $q \in \mathbb{R}^f$ geschrieben werden kann als

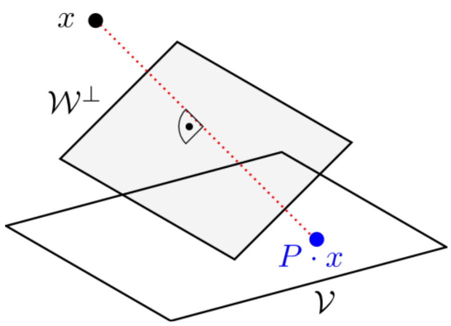
$$\mathbf{q} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{q} + (\mathbf{I}-\mathbf{P})\cdot\mathbf{q}.$$

Dies erlaubt uns, den Unterraum $\mathbb{R}^f$ in zwei Unterräume

$$\mathbb{R}^f = \mathrm{span}(\mathcal{V}+\mathcal{W}),$$

mit $\mathrm{im}(\mathbf{P}) = \mathcal{V}$ und $\mathrm{kern}(\mathbf{I}-\mathbf{P}) = \mathcal{W}$, aufzuteilen.

Der Projektor $\mathbf{P}$ projiziert auf $\mathcal{V}$ parallel zu $\mathcal{W}$.



Projektion eines Punktes aus $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$

Bei zwei Basen

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}],\ \mathrm{span}(\mathbf{V}) = \mathcal{V},$$
$$\mathbf{W} = [\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \dots, \mathbf{w_n}],\ \mathrm{span}(\mathbf{W}) = \mathcal{W}$$

ist der Projektor $\mathbf{P} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{W^T} \cdot \mathbf{V})^{-1} \cdot \mathbf{W^T}$.

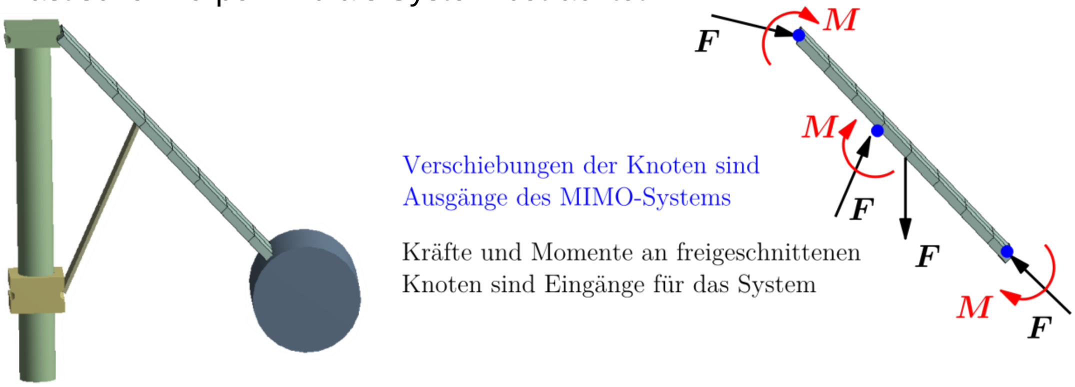
Vereinfachungen:

- Biorthogonale Basen $\mathbf{W^T} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W^T}$
- Orthogonale Projektion $\mathbf{P} = \mathbf{P^T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{V^T} \cdot \mathbf{V})^{-1} \cdot \mathbf{V^T}$
- Orthogonale Projektion mit orthogonaler Basis $\mathbf{V^T} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V^T}$

Aufgabe von Modellreduktionsverfahren:
Bestimmen der Matrizen $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$.

Verwendung des Systemgedankens für die Modellreduktion elastischer Körper:

Elastischer Körper wird als System betrachtet.



Kräfte (Systemeingänge) $\mathbf{F} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\mathrm{t})$
Verschiebungen (Systemausgänge) $\mathbf{y}(\mathrm{t}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{q}(\mathrm{t})$

Elastische Körper können als MIMO-System 2. Ordnung geschrieben werden

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{q}$$

Idee: Betrachtung des MIMO Systems 2. Ordnung als Ausgangspunkt für Modellreduktionsverfahren → Reduktion durch Petrov-Galerkin Projektion

$$\underbrace{\mathbf{W^T} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}}_{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \underbrace{\mathbf{W^T} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}}_{\bar{\mathbf{K}}} \cdot \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{W^T} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$
$$\bar{\mathbf{y}} = \underbrace{\mathbf{C} \cdot \mathbf{V}}_{\bar{\mathbf{C}}} \cdot \bar{\mathbf{q}}$$

Verwendung von Reduktionsverfahren aus Systemtheorie und Regelungstechnik

Werkzeuge:

- Laplace-Transformation in den komplexen s-Raum

  $$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

- Laplace-Transformation des MIMO-Systems bei $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$

  $$(s^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{Q}(s) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s)$$
  $$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}(s)$$

  Wobei $\mathbf{U}(s)$ und $\mathbf{Y}(s)$ die Laplace-Transformierten des Eingangs und des Ausgangs sind

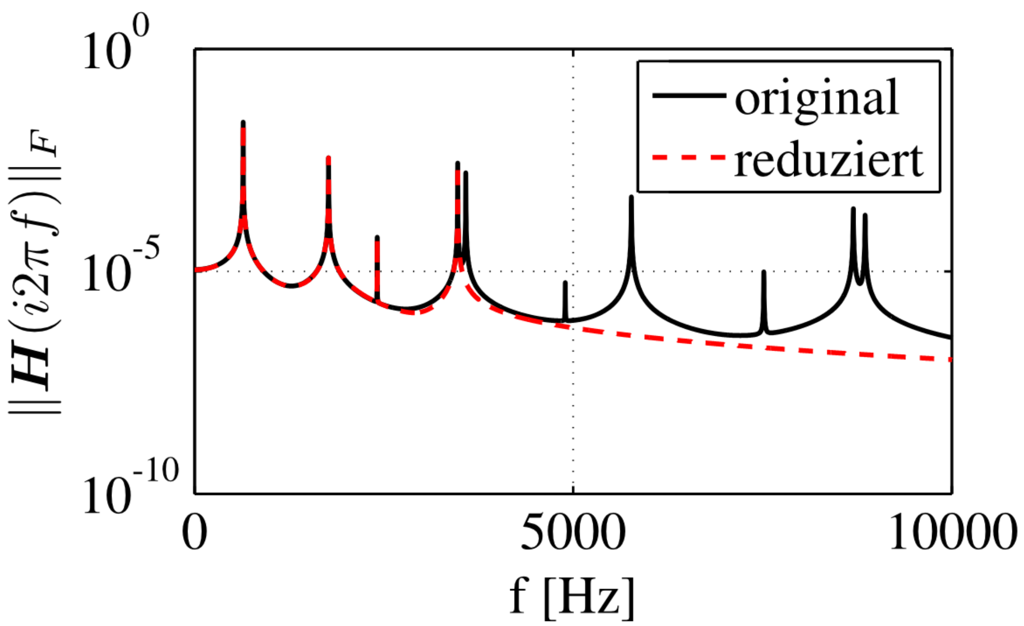
- Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsvektor wird Übertragungsmatrix $\mathbf{H}(s)$ genannt

  $$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s) \cdot \mathbf{U}(s) \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}(s) = \mathbf{C} \cdot (s^2\mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

- Übertragungsfunktion
  Regelungstechnik: Evaluierung der Übertragungsmatrix auf der imaginären Achse

  $$s = i2\pi f$$

  $\| \boldsymbol{H}(i\omega)_{jk} \|$ → Verschiebung/Verformung an Ausgang j wenn das System an Eingang k mit Einheitsamplitude und der Frequenz $\omega = 2\pi f$ angeregt wird



Norm der Übertragungsfunktion eines Fliehkraftpendels

Fehlergüte von reduzierten Modellen

$\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{q}}(t)$ Fehler in Zustandskoordinaten
$\mathbf{E}(s) = \mathbf{Q}(s) - \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{Q}}(s)$ Fehler im Zustandsraum

- Ausgangsfehler

$$\boldsymbol{e}_O(t) = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)$$
$$\begin{aligned}\mathbf{E}_O(s) &= \mathbf{Y}(s) - \bar{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{C}(s) \cdot \mathbf{Q}(s) - \mathbf{C}(s) \cdot \bar{\mathbf{Q}}(s) \\ &= \mathbf{C} \cdot (\mathbf{Q}(s) - \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{Q}}(s)) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}(s)\end{aligned}$$

- Fehlersystem

$$\mathbf{H}_E(s) = \mathbf{H}(s) - \bar{\mathbf{H}}(s)$$
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s) \cdot \mathbf{U}(s) \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{Y}}(s) = \bar{\mathbf{H}}(s) \cdot \mathbf{U}(s)$$

eingefügt kann der Ausgangsfehler als

$$\mathbf{E}_O(s) = \mathbf{H}(s) \cdot \mathbf{U}(s) - \bar{\mathbf{H}}(s) \cdot \mathbf{U}(s) = \mathbf{H}_E(s) \cdot \mathbf{U}(s)$$

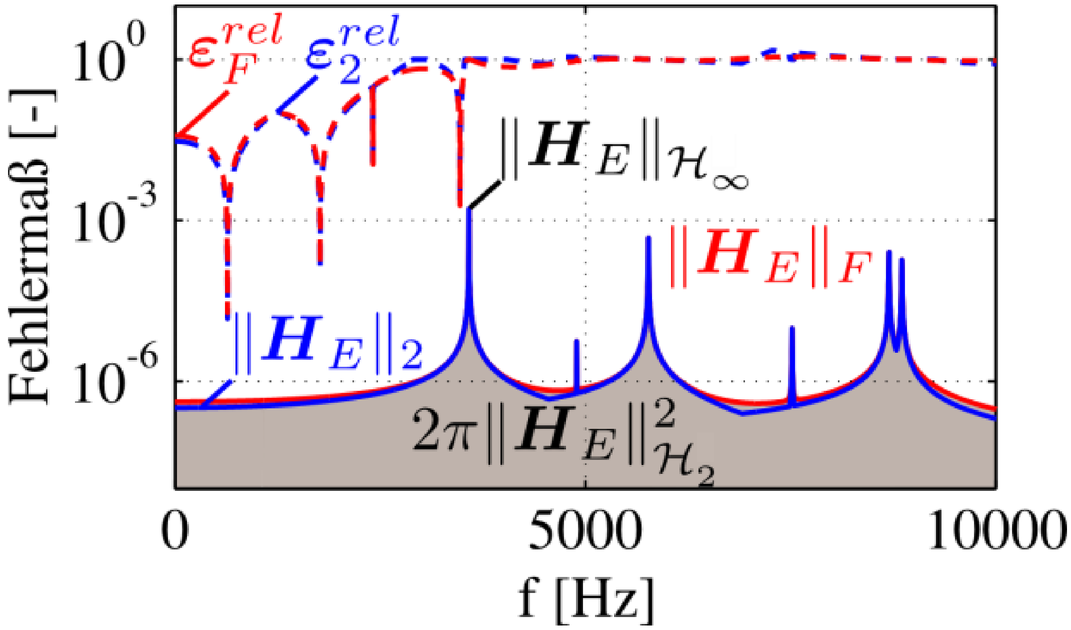
geschrieben werden.

Üblicherweise wird der Fehler in der $\mathcal{H}_\infty$- bzw. $\mathcal{H}_2$-Norm gemessen.

$$\| \mathbf{H} \|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{u \neq 0} \frac{\| \mathbf{Hu} \|_{\mathcal{L}_2^r(i\,\mathbb{R})}}{\| \mathbf{u} \|_{\mathcal{L}_2^p(i\,\mathbb{R})}} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \| \mathbf{H}(\omega) \|_2$$
$$\| \mathbf{H} \|_{\mathcal{H}_2} = \left(\frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{trace}\left(\mathbf{H}(i\,\omega) \cdot \mathbf{H}^H(i\,\omega)\right) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \| \mathbf{H}(i\,\omega) \|_F^2 \, d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Häufig erfolgt eine Normierung des Fehlers durch die Norm des Originalsystems $\| \mathbf{H} \|_{\mathcal{F}/2}$. Diese Fehler werden relative Fehler genannt

$$\boldsymbol{\epsilon}_2^{\mathrm{rel}}(f) = \frac{\| \mathbf{H}_E(i2\pi f) \|_2}{\| \mathbf{H}(i2\pi f) \|_2}, \; \boldsymbol{\epsilon}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{rel}}(f) = \frac{\| \mathbf{H}_E(i2\pi f) \|_{\mathcal{F}}}{\| \mathbf{H}(i2\pi f) \|_{\mathcal{F}}}.$$



Verschiedene Fehlermaße

Literatur

[1] J. Willems. In control, almost from the beginning until the day after tomorrow. *European Journal of Control*, 13(1):71–83, 2007.

[2] A.C. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. SIAM, Philadelphia, 2005.

[3] P. Benner, V. Mehrmann, and D.C. Sorensen, editors. *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*, volume 45 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, Germany, 2005.

[4] W. Schilders, H. van der Vorst, and J. Rommes. *Model Order Reduction*. Springer, Berlin, 2008.

[5] M. Lehner. *Modellreduktion in elastischen Mehrkörpersystemen (in German)*. Dissertation, Schriften aus dem Institut für Technische und Numerische Mechanik der Universität Stuttgart, Band 10. Shaker Verlag, Aachen, 2007.