Kinetik eines freien elastischen Körpers

D'Alembertsche Prinzip in Referenzkonfiguration

$$\boxed{\underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{a}_{\mathrm{IP}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\mathrm{IP}}\, \mathrm{dV}}_{\delta W_m} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \widehat{\mathbf{G}} \cdot \widehat{\mathbf{C}} \cdot \delta \widehat{\mathbf{G}}\, \mathrm{dV}}_{\delta W_e} - \underbrace{\int_{\Gamma_{q0}} \overline{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\mathrm{IP}}\, \mathrm{dA}}_{\delta W_p} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{r}_{\mathrm{IP}}\, \mathrm{dV}}_{\delta W_b} = 0}$$

mit der virtuellen Verrückung $\delta\mathbf{r}_{\mathrm{IP}} = \mathbf{T}^{t}_{\mathrm{RP}} \cdot \delta \mathbf{z}_{\mathrm{I}}$

Virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

$$\delta W_m = \left(\int_{\Omega_0} (\mathbf{T}^{t}_{\mathrm{RP}})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}^{t}_{\mathrm{RP}} \mathrm{dm} \cdot \mathbf{z}_{\mathrm{III}} + \int_{\Omega_0} (\mathbf{T}^{t}_{\mathrm{RP}})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\varsigma}^{t}_{\mathrm{RP}}\, \mathrm{dm} \right) \cdot \delta \mathbf{z}_{\mathrm{I}} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{z}_{\mathrm{III}} + \mathbf{h}_{\omega}) \cdot \delta \mathbf{z}_{\mathrm{I}}$$

Dabei ist $\rho_0 \mathrm{dV} = \mathrm{dm}$ berücksichtigt. Es ergeben sich hieraus die Massenmatrix $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{\mathrm{T}} > 0$ und der Vektor der Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte $\mathbf{h}_{\omega}$.

Massenmatrix:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{RP}} \\ \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{P}} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{E} \quad -\tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{RP}} \quad \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{P}}] \mathrm{dm} = \begin{bmatrix} \mathrm{m}\mathbf{E} & \mathrm{m}\tilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{t}} \\ \mathrm{m}\tilde{\mathbf{c}} & \mathbf{I} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{r}} \\ \mathbf{C}_{\mathrm{t}} & \mathbf{C}_{\mathrm{r}} & \mathbf{M}_{\mathrm{e}} \end{bmatrix}$$

Masse des Körpers: $\mathrm{m}\mathbf{E} = \int_{\Omega_0} \mathbf{E} \mathrm{dm}$

Trägheitstensor: $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{\mathrm{RP}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{RP}}\, \mathrm{dm}$

Schwerpunktlage: $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathrm{m}} \int_{\Omega_0} \mathbf{r}_{\mathrm{RP}}\, \mathrm{dm}$

Massenmatrix aus elastischem Anteil: $\mathbf{M}_{\mathrm{e}} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{P}}\, \mathrm{dm}$

Kopplungsterme: $\mathbf{C}_{\mathrm{t}} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{P}}\, \mathrm{dm}$

$\mathbf{C}_{\mathrm{r}} = \mathbf{C}_{\mathrm{r}}(\mathbf{q}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{P}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{RP}}\, \mathrm{dm}$

Vektor der Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte

$$\mathbf{h}_\omega = \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T \\ \mathbf{\Phi}_{RP}^T \end{bmatrix} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \mathbf{r}_{RP} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{RP})\,\mathrm{dm} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\omega t} \\ \mathbf{h}_{\omega r} \\ \mathbf{h}_{\omega e} \end{bmatrix}$$

Hierbei ist es sinnvoll die elastischen Anteile von der Referenzbewegung zu trennen.

translatorischer Anteil:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\omega t} &= \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \mathbf{r}_{RP} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{RP}\,\mathrm{dm} \\ &= \mathrm{m}\,\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \mathbf{c} + 2\mathrm{m}\,\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \dot{\mathbf{c}} \end{aligned}$$

rotatorischer Anteil:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\omega r} &= -\int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \mathbf{r}_{RP} + 2\tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{RP}\,\mathrm{dm} \\ &= \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{RP} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{RP}^T \cdot \boldsymbol{\omega}_{IR} + 2\,\tilde{\mathbf{r}}_{RP} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{RP}^T \cdot \boldsymbol{\omega}_{IR}\,\mathrm{dm} \\ &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_{IR} + \mathbf{G}_r \cdot \boldsymbol{\omega}_{IR} \end{aligned}$$

mit $\mathbf{G}_r = \mathbf{G}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 2\int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{r}}_{RP} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{RP}^T\,\mathrm{dm}$

Anteil aus elastischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\omega e} &= \int_{\Omega_0} \mathbf{\Phi}_P^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \mathbf{r}_{RP} + 2\mathbf{\Phi}_P^T \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{RP}\,\mathrm{dm} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{IR}^T \cdot \mathbf{O}_e^1 \cdot \boldsymbol{\omega}_{IR} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\omega}_{IR}^T \cdot \mathbf{O}_e^{n_q} \cdot \boldsymbol{\omega}_{IR} \end{bmatrix} + \mathbf{G}_e \cdot \boldsymbol{\omega}_{IR} \end{aligned}$$

mit $\mathbf{G}_e = \mathbf{G}_e(\dot{\mathbf{q}}) = 2\int_{\Omega_0} \mathbf{\Phi}_P^T \cdot \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{RP}^T\,\mathrm{dm}$

und $\mathbf{O}_e^k = \mathbf{O}_e^k(\mathrm{q}) = \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{\Phi}}_P^{*k} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{RP}\,\mathrm{dm}$, wobei $\mathbf{\Phi}_P^{*k}$ die k-te Ansatzfunktion ist

Virtuelle Arbeit der inneren Kräfte

$$\delta W_e = \int_{\Omega_0} \hat{\mathbf{G}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \delta\hat{\mathbf{G}}\, dV = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_e\mathbf{q}_e + \overline{\mathbf{K}}_e(\mathbf{q}_e)\mathbf{q}_e \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_e} \cdot \delta\mathbf{z}_I \qquad \text{mit}$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{L}_L\mathbf{\Phi}_P \cdot \mathbf{q}_e + \frac{1}{2}\mathbf{L}_N(\mathbf{\Phi}_P\mathbf{q}_e)\mathbf{\Phi}_P \cdot \mathbf{q}_e = \mathbf{B}_L \cdot \mathbf{q}_e + \frac{1}{2}\mathbf{B}_N(\mathbf{q}_e) \cdot \mathbf{q}_e,$$

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_L^T \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}_L\, dV \qquad \text{und}$$

$$\overline{\mathbf{K}}_e(\mathbf{q}_e) = \int_{\Omega_0} \left(\mathbf{B}_N^T(\mathbf{q}_e) \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}_L + \frac{1}{2}\left(\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N(\mathbf{q}_e)\right)^T \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B}_N(\mathbf{q}_e) \right) dV$$

Virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte

aus Oberflächenspannungen $\overline{\mathbf{p}}$

$$\delta W_p = \underbrace{\int_{\Gamma_{q0}} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{RP} \\ \mathbf{\Phi}_P^T \end{bmatrix} \cdot \overline{\mathbf{p}}\, dA}_{\mathbf{h}_p} \cdot \delta\mathbf{z}_I$$

aus Einzelkräften/Momenten $\mathbf{f}_{P_k}, \mathbf{l}_{P_k}$ angreifend am Punkt P_k

$$\delta W_d = \underbrace{\sum_{k=1}^{n_k} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{RP_k} \\ \mathbf{\Phi}_{P_k}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f}_{P_k} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{\Psi}_{P_k}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{l}_{P_k} \right)}_{\mathbf{h}_d} \cdot \delta\mathbf{z}_I$$

Virtuelle Arbeit der Volumenkräfte

$$\delta W_b = \underbrace{\int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{RP} \\ \mathbf{\Phi}_P^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{b}\, dm}_{\mathbf{h}_b} \cdot \delta\mathbf{z}_I \quad \text{bei Gravitation } \mathbf{b} = \mathbf{S}_{IP}^T \cdot \mathbf{g}$$

Bewegungsgleichungen eines freien Körpers

$$\left(\mathbf{M} \cdot \mathbf{z}_{III} + \mathbf{h}_\omega + \mathbf{h}_e - \mathbf{h}_p - \mathbf{h}_d - \mathbf{h}_b\right) \cdot \delta\mathbf{z}_I = 0, \qquad \forall \delta\mathbf{z}_I$$

$$\boxed{\mathbf{M} \cdot \mathbf{z}_{III} = \underbrace{-\mathbf{h}_\omega - \mathbf{h}_e + \mathbf{h}_p + \mathbf{h}_d + \mathbf{h}_b}_{\mathbf{h}_a}}$$