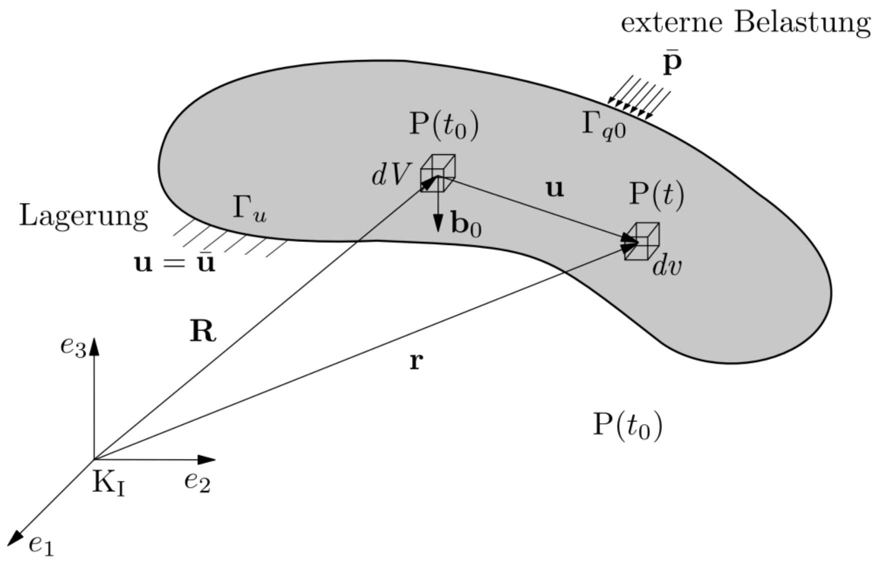
Bewegungsgleichung eines elastischen Körpers



Starke Form

Die Änderung eines Körpers durch äußere Einwirkungen wird durch Bilanzgleichungen beschrieben. Thermodynamische Effekte werden im Weiteren nicht berücksichtigt.

Massenbilanz

$$\mathrm{m} = \int_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{R})\mathrm{dV} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r},\mathrm{t})\mathrm{dv} = \int_{\Omega_0} \rho(\mathbf{r},\mathrm{t}) \det(\mathbf{F})\, \mathrm{dV} = \mathrm{const}$$

Impulsbilanz

$\rho_0\mathbf{a} = \rho_0\mathbf{b}_0 + \mathrm{div}(\mathbf{P}_1)$ mit

$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$	Beschleunigung
$\mathbf{b}$	Volumenkräfte
$\mathrm{div}(\mathbf{P}_1)$	Vektor mit Komponenten $\frac{\partial P_{1,ij}}{\partial R_j}$
	(Divergenz des 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors)

Drallbilanz

Aus der Drallbilanz folgt die Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2^{\mathrm{T}}$ bzw. des Cauchyschen Spannungstensors $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}$.

Rand- und Anfangsbedingungen

Verschiebungsrandbedingung: $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ auf Γ_u

Spannungsrandbedingung: $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{P_1}\mathbf{N}$ auf Γ_q

Anfangsbedingungen: $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t = 0) = \mathbf{R} - \mathbf{r}(R, t = 0)$

$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{R}, t = 0) = \dot{\mathbf{u}}_0$

Schwache Form

Prinzip der virtuellen Arbeit

Im Gleichgewicht muss die Summe der virtuellen Arbeit aller auf einen Körper wirkenden inneren und äußeren Kräfte verschwinden.

D'Alembertsches Prinzip in Referenzkonfiguration

$$\underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{r} dV}_{\delta W_t} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \mathbf{P}_2 : \delta\mathbf{G} dV}_{\delta W_i = -\delta U} = \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{r} dV + \int_{\Gamma_q} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{r} dA}_{\delta W_e}$$

Für lineare Stoffgesetze gilt:

$$\delta W_i = \int_{\Omega_0} P_2 : \delta\mathbf{G} dV = \int_{\Omega_0} \widehat{\mathbf{G}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \delta\widehat{\mathbf{G}} dV$$