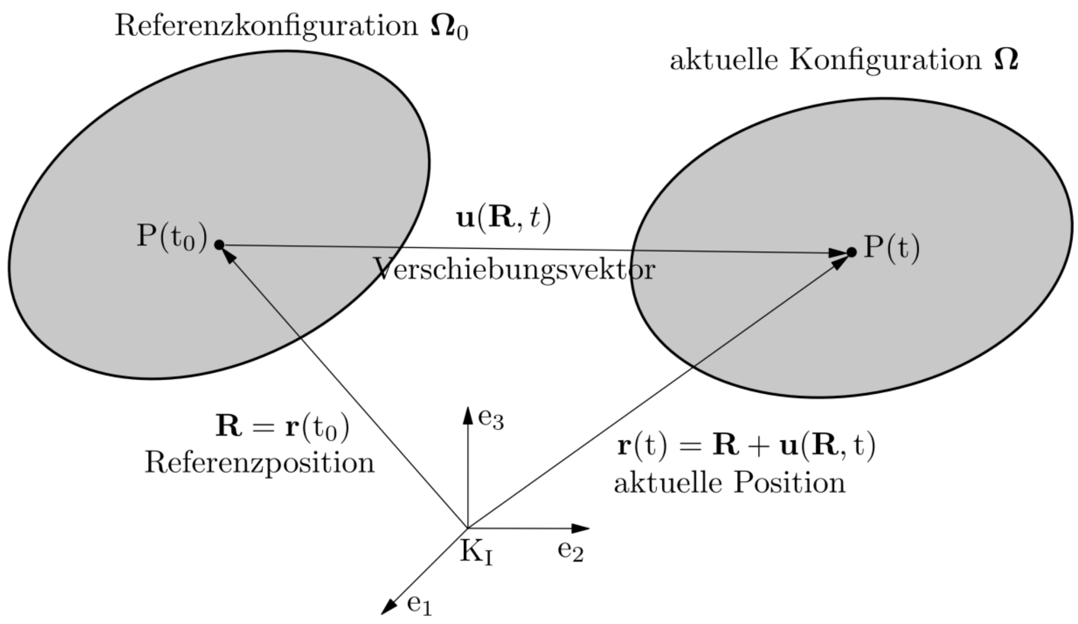
Kontinuumsmechanische Grundlagen

Kinematik

Die Bewegung eines Körpers K wird durch die Bewegung seiner materiellen Punkte P beschrieben.



Die Verschiebung $\mathbf{u}(\mathbf{R}, \mathrm{t})$ enthält Anteile aus der Starrkörperbewegung und der Verformung des Körpers.

Die Verformungen können mit dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor beschrieben werden: $\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^\mathrm{T}\mathbf{F} - \mathbf{E})$ mit $\mathbf{G} = \mathbf{G}^\mathrm{T}$

Deformationsgradient: $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathrm{r}_\mathrm{i}}{\partial \mathrm{R}_\mathrm{j}}$, $\quad \mathrm{i}, \mathrm{j} = 1,2,3$

Verschiebungsgradient: $\Delta\mathbf{F} = \frac{\partial \mathrm{u}_\mathrm{i}}{\partial \mathrm{R}_\mathrm{j}}$

Somit folgt

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{E} + \Delta\mathbf{F}$$

und es ergibt sich

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}^\mathrm{T} + \Delta\mathbf{F}^\mathrm{T}\Delta\mathbf{F}) \text{ bzw. } \mathrm{G}_\mathrm{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}_\mathrm{i}}{\partial \mathrm{R}_\mathrm{j}} + \frac{\partial \mathrm{u}_\mathrm{j}}{\partial \mathrm{R}_\mathrm{i}} + \frac{\partial \mathrm{u}_\mathrm{k}}{\partial \mathrm{R}_\mathrm{i}}\frac{\partial \mathrm{u}_\mathrm{k}}{\partial \mathrm{R}_\mathrm{j}}\right).$$

Bei Annahme kleiner Verschiebungen $\left|\frac{\partial \mathrm{u}_\mathrm{i}}{\partial \mathrm{R}_\mathrm{j}}\right| \ll 1$ können in $\mathbf{G}$ die nichtlinearen Terme vernachlässigt werden. Des Weiteren sind die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial \mathrm{R}_\mathrm{j}}$ und $\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}_\mathrm{j}}$ äquivalent.

Daraus folgt der lineare Verzerrungstensor $\varepsilon_\mathrm{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}_\mathrm{i}}{\partial \mathrm{r}_\mathrm{j}} + \frac{\partial \mathrm{u}_\mathrm{j}}{\partial \mathrm{r}_\mathrm{i}}\right)$ mit $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^\mathrm{T}$.

Beziehungen zwischen Verzerrungen und Verschiebungen

Die unabhängigen Einträge des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors $\mathbf{G}$ und des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ lassen sich zusammenfassen:

$$\hat{\mathbf{G}} = [\mathrm{G}_{11} \quad \mathrm{G}_{22} \quad \mathrm{G}_{33} \quad 2\mathrm{G}_{12} \quad 2\mathrm{G}_{23} \quad 2\mathrm{G}_{13}]$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13}]$$

Definition von Differentialoperatoren mit $\partial_\mathrm{i} = \frac{\partial \ldots}{\partial \mathrm{R}_\mathrm{i}}$

$$\mathbf{L}_\mathrm{L} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{L}_\mathrm{N}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \partial_1\mathrm{u}_1\,\partial_1 & \partial_1\mathrm{u}_2\,\partial_1 & \partial_1\mathrm{u}_3\,\partial_1 \\ \partial_2\mathrm{u}_1\,\partial_2 & \partial_2\mathrm{u}_2\,\partial_2 & \partial_2\mathrm{u}_3\,\partial_2 \\ \partial_3\mathrm{u}_1\,\partial_3 & \partial_3\mathrm{u}_2\,\partial_3 & \partial_3\mathrm{u}_3\,\partial_3 \\ \partial_1\mathrm{u}_1\,\partial_2 + \partial_2\mathrm{u}_1\,\partial_1 & \partial_1\mathrm{u}_2\,\partial_2 + \partial_2\mathrm{u}_2\,\partial_1 & \partial_1\mathrm{u}_3\,\partial_2 + \partial_2\mathrm{u}_3\,\partial_1 \\ \partial_2\mathrm{u}_1\,\partial_3 + \partial_3\mathrm{u}_1\,\partial_2 & \partial_2\mathrm{u}_2\,\partial_3 + \partial_3\mathrm{u}_2\,\partial_2 & \partial_2\mathrm{u}_3\,\partial_3 + \partial_3\mathrm{u}_3\,\partial_2 \\ \partial_3\mathrm{u}_1\,\partial_1 + \partial_1\mathrm{u}_1\,\partial_3 & \partial_3\mathrm{u}_2\,\partial_1 + \partial_1\mathrm{u}_2\,\partial_3 & \partial_3\mathrm{u}_3\,\partial_1 + \partial_1\mathrm{u}_3\,\partial_3 \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich die Beziehung zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{L}_\mathbf{L} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{L}_\mathbf{N}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$$

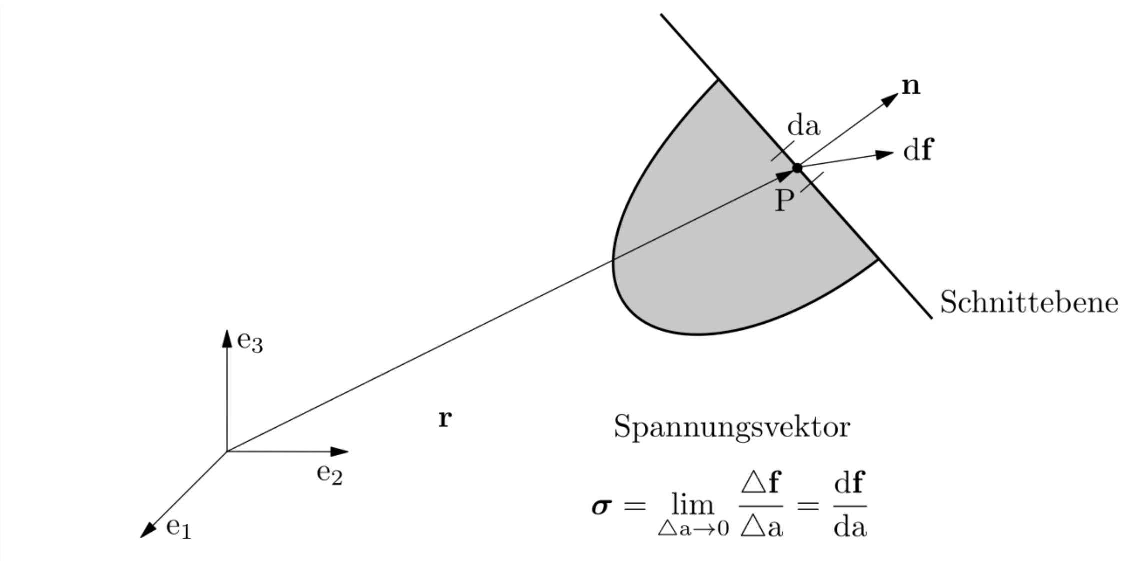
$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}_\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}$$

und den Verzerrungs- und Verschiebungsgeschwindigkeiten

$$\dot{\hat{\mathbf{G}}} = \mathbf{L}_\mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{L}}_\mathbf{N}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{L}_\mathbf{N}(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}}\right) = \mathbf{L}_\mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{L}_\mathbf{N}(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbf{L}_\mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{u}}$$

Spannungsmaße



Der Spannungsvektor hängt von der Orientierung $\mathbf{n}$ der Schnittfläche ab.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$$

wobei $\mathbf{T}$ den Cauchy Spannungstensor bezeichnet.

Oft ist die Betrachtung eines Elements dA und der Normalenrichtung $\mathbf{N}$ in Referenzkonfiguration sinnvoll.

→ 1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor

$$\mathbf{P}_1 = \det(\mathbf{F})\, \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$$

→ 2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor (symmetrische Modifikation)

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}_1 = \det(\mathbf{F})\, \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$$

Die Einträge des Spannungstensors lassen sich wiederum zusammenfassen zu

$$\widehat{\mathbf{P}}_2 = [\mathrm{P}_{2,11} \quad \mathrm{P}_{2,22} \quad \mathrm{P}_{2,33} \quad \mathrm{P}_{2,12} \quad \mathrm{P}_{2,23} \quad \mathrm{P}_{2,13}].$$

Konstitutive Gleichungen

- beschreiben den Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verformungszustand
- nur bestimmte Kombinationen aus Spannungs- und Verzerrungsmaßen sinnvoll

Für homogenes elastisches Materialverhalten kann mit dem Green-Lagrange Verzerrungstensor $\mathbf{G}$ und dem 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor $\mathbf{P}_2$ allgemein die konstitutive Gleichung $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2(\mathbf{G})$ formuliert werden.

Weitere Annahmen:

- isotropes Materialverhalten
- kleine Verzerrung (Linearisierung des Stoffgesetzes)

Es folgt das Stoffgesetz

$$\mathbf{P}_2 = 2\mu\,\mathbf{G} + \lambda\,\mathrm{Spur}(\mathbf{G})\cdot\mathbf{E} = \mathbf{C} : \mathbf{G},$$

mit den Lamé-Konstanten

$$\mu = \frac{\mathrm{E}}{2(1+\upsilon)}\,, \qquad \lambda = \frac{\mathrm{E}\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

und dem Elastizitätsmodul E und der Poissonzahl ν.

$\mathbf{C}$ ist ein Tensor vierter Stufe

$$\mathrm{C}_{ijrs} = \lambda \mathrm{T}_{ij}\mathrm{T}_{rs} + \mu(\mathrm{T}_{ir}\mathrm{T}_{js} + \mathrm{T}_{is}\mathrm{T}_{jr}).$$

Das Stoffgesetz kann auch als $\widehat{\mathbf{P}}_2 = \hat{\mathbf{C}} \cdot \widehat{\mathbf{G}}$ geschrieben werden.

Dabei ist

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{\mathrm{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & 0 & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix}.$$