



Nichtholonome Bindungen

Geometrische Bindungen:

Beziehung zwischen Lagegrößen
reduziert Freiheitsgrad der Lage und der Geschwindigkeit
Annahme:

alle geometrischen Bindungen sind im Lagevektor enthalten: $y = (y_1, \dots, y_f) \in \mathbb{R}^{\bar{f}}$

Kinematische Bindungen:

Beziehung zwischen Geschwindigkeitsgrößen
reduziert zunächst nur Freiheitsgrad der Geschwindigkeit

implizit: Beschreibung der Einschränkung von k Bewegungsrichtungen

$$A \cdot \dot{y} = \begin{bmatrix} a_1^T(y) \\ \vdots \\ a_k^T(y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{\bar{f}} \end{bmatrix} = 0$$

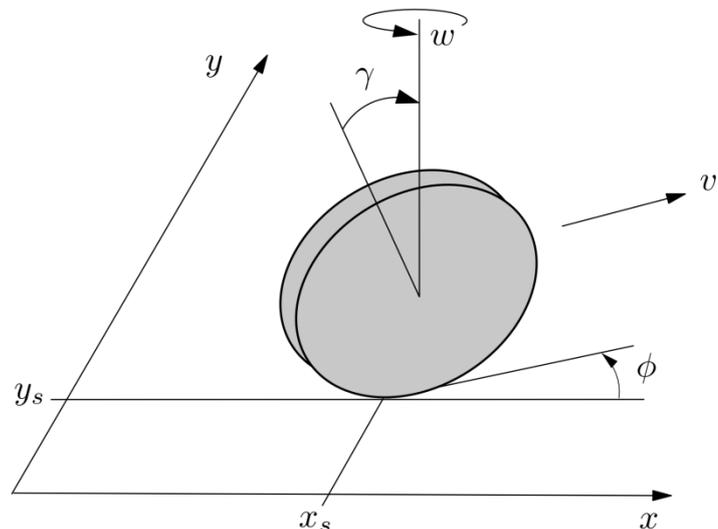
explizit: Beschreibung der $\bar{f} - k$ freien Bewegungsrichtungen

$$\dot{y} = G \cdot z = [g_1(y) \quad \dots \quad g_{\bar{f}-k}(y)] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{\bar{f}-k} \end{bmatrix}$$

Zusammenhang: $A \cdot \dot{y} = A \cdot G \cdot z = 0, \forall z \Rightarrow A \cdot G = 0$

Beispiel: rollendes Rad

$\bar{f} = 4, y = (x_s, y_s, \phi, \gamma)$





Integrierbarkeit kinematischer Bindungen:

einzelne Bindung:

$$a_1(\mathbf{y}) \cdot \dot{\mathbf{y}} = 0, \text{ und } \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{z} = [g_1(\mathbf{y}) \quad \dots \quad g_{\bar{f}-k}(\mathbf{y})] \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{\bar{f}-k} \end{bmatrix}$$

Eine kinematische Bindung ist integrierbar, falls eine entsprechende geometrische Bindung existiert:

$$c(\mathbf{y}) = 0 \Rightarrow \dot{c} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial c}{\partial y_{\bar{f}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_1(\mathbf{y})} \cdot \dot{\mathbf{y}} = 0$$

$$a_1(\mathbf{y}) \cdot \dot{\mathbf{y}} = 0 \text{ integrierbar falls } \frac{\partial a_i}{\partial y_j} = \frac{\partial a_j}{\partial y_i} \quad \forall i, j \text{ erfüllt}$$

(Integrabilitätsbedingung)

integrierbar:

Reduziert Freiheitsgrad der Lage und Geschwindigkeit $f = \bar{f} - 1$
(holonome Bindung)

nicht integrierbar:

Freiheitsgrad der Lage wird nicht reduziert $f = \bar{f}$
Freiheitsgrad der Geschwindigkeit wird reduziert $g = \bar{f} - 1$
(nichtholonome Bindung)

mehrere Bindungen:

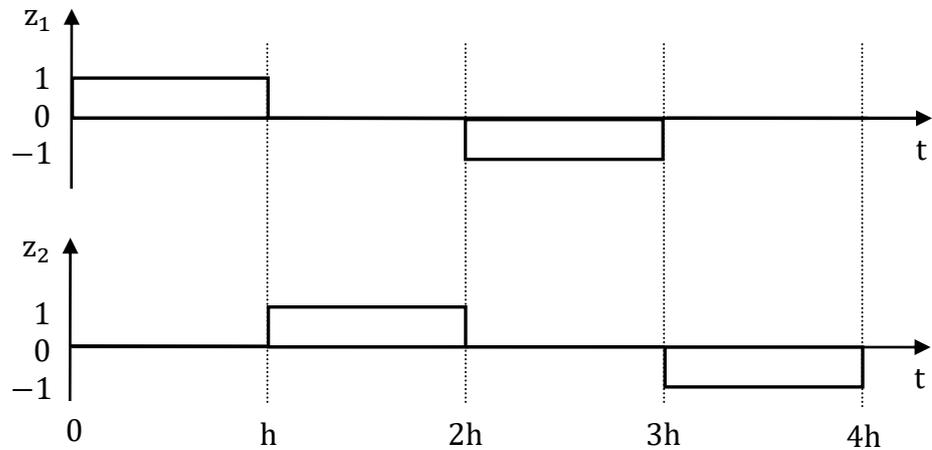
Die Gesamtheit der kinematischen Bindungen muss betrachtet werden.
Dazu ist eine alternative Betrachtung nichtholonomer Bindungen hilfreich:
durch Kombination der $g = \bar{f} - k$ freien Geschwindigkeiten
sind Lageänderungen in den kinematisch gesperrten Richtungen möglich.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{z} = \sum_{i=1}^g g_i(\mathbf{y}) z_i \text{ linear unabhängig von } g_i$$



Überlegung für $g = 2$ $\dot{y} = \mathbf{g}_1(y) z_1 + \mathbf{g}_2(y) z_2$

Schalt-
reihenfolge:



Differentialgleichung: $\dot{y} = \mathbf{g}_1(y)$ $\dot{y} = \mathbf{g}_2(y)$ $\dot{y} = -\mathbf{g}_1(y)$ $\dot{y} = -\mathbf{g}_2(y)$
 Fluss: $\phi_t^{\mathbf{g}_1}$ $\phi_t^{\mathbf{g}_2}$ $\phi_t^{-\mathbf{g}_1}$ $\phi_t^{-\mathbf{g}_2}$

Lageänderung für

$t = h$ $y(h) = y_1 = \phi_h^{\mathbf{g}_1}(y_0)$
 $t = 2h$ $y(2h) = y_2 = \phi_h^{\mathbf{g}_2}(y_1) = \phi_h^{\mathbf{g}_2} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_1}(y_0)$
 $t = 3h$ $y(3h) = y_3 = \phi_h^{-\mathbf{g}_1}(y_2) = \phi_h^{-\mathbf{g}_1} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_2} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_1}(y_0)$
 $t = 4h$ $y(4h) = y_4 = \phi_h^{-\mathbf{g}_2}(y_3) = \phi_h^{-\mathbf{g}_2} \circ \phi_h^{-\mathbf{g}_1} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_2} \circ \phi_h^{\mathbf{g}_1}(y_0)$

Approximation kleiner Lageänderungen über Taylorreihe 2. Ordnung

$0 \leq t \leq h, \quad \dot{y} = \mathbf{g}_1(y), \quad y(0) = y_0$

$$\rightarrow y(t_0 + h) = y(t_0) + \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0} h + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2y}{dt^2} \right|_{t_0} h^2 + \dots$$

$$\downarrow t_0 = 0 \quad \swarrow \dot{y} = \mathbf{g}_1 \quad \swarrow \dot{y} = \dot{\mathbf{g}}_1 = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial y} \dot{y} =: D\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1$$

$$\rightarrow y_1 \approx y_0 + \mathbf{g}_{10} h + \frac{1}{2} D\mathbf{g}_{10} \mathbf{g}_{10} h^2$$

