Bewegungsgleichungen mit algebraischen Bindungsgleichungen

Schließbedingung

$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{y}^b, t) = \mathbf{0}, \qquad c \in \mathbb{R}^{n_c}$

Die verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y}^b$ sind nicht unabhängig voneinander und das System hat $f = f^b - n_c$ Freiheitsgrade.

Die virtuellen Verrückungen sind ebenfalls nicht unabhängig voneinander:

$$\delta\mathbf{c} = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{y}^b} \cdot \delta\mathbf{y}^b = \mathbf{C}(\mathbf{y}^b, t) \cdot \delta\mathbf{y}^b = \mathbf{0}$$

Bewegungsgleichungen

d'Alembert'sche Prinzip

$$\sum_{i=1}^{p} [\delta\mathbf{r}_i \cdot (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{f}_i^e) + \delta\mathbf{s}_i \cdot (\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{l}_i^e)] = 0$$

Mit den virtuellen Verrückungen und der Kinematik des aufgespannten Baums

$$\delta\mathbf{r}_i = \mathbf{J}_{Ti}^b(\mathbf{y}^b, t) \cdot \delta\mathbf{y}^b \qquad \text{und} \qquad \delta\mathbf{s}_i = \mathbf{J}_{Ri}^b(\mathbf{y}^b, t) \cdot \delta\mathbf{y}^b$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{J}_{Ti}^b(\mathbf{y}^b, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}}^b + \bar{\mathbf{a}}_i^b(\mathbf{y}^b, \dot{\mathbf{y}}^b, t) \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{J}_{Ri}^b(\mathbf{y}^b, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}}^b + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i^b(\mathbf{y}^b, \dot{\mathbf{y}}^b, t)$$

folgt

$$\delta\mathbf{y}^b \cdot \sum_{i=1}^{p} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{J}_{Ti}^{b^T} \cdot m_i \cdot \mathbf{J}_{Ti}^b + \mathbf{J}_{Ri}^{b^T} \cdot \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{J}_{Ri}^b\right) \cdot \ddot{\mathbf{y}}^b + \mathbf{J}_{Ti}^{b^T} \cdot m_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_i^b + \mathbf{J}_{Ri}^{b^T} \cdot \mathbf{I}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i^b + \mathbf{J}_{Ri}^{b^T} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i \\ - \mathbf{J}_{Ti}^{b^T} \cdot \mathbf{f}_i^e - \mathbf{J}_{Ri}^{b^T} \cdot \mathbf{l}_i^e \end{bmatrix} = 0,$$

$\forall$ kinematisch zulässigen $\delta\mathbf{y}^b$

bzw.

$$\delta\mathbf{y}^b \cdot (\mathbf{M}^b \cdot \ddot{\mathbf{y}}^b + \mathbf{k}^b - \mathbf{q}^b) = 0, \qquad \forall \delta\mathbf{y}^b : \mathbf{C} \cdot \delta\mathbf{y}^b = \mathbf{0}$$

Mit Satz 2.2 und den Lagrange Multiplikatoren $\lambda \in \mathbb{R}^{n_c}$ ergibt sich

$$\delta\mathbf{y}^b \cdot (\mathbf{M}^b \cdot \ddot{\mathbf{y}}^b + \mathbf{k}^b - \mathbf{q}^b - \mathbf{C}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}) = 0, \qquad \forall\, \delta\mathbf{y}^b$$

Mit Satz 2.1 lauten dann die Bewegungsgleichungen für MKS mit Schleifenstruktur

$$\mathbf{M}^b(\mathbf{y}^b, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}}^b + \mathbf{k}^b(\mathbf{y}^b, \dot{\mathbf{y}}^b, t) - \mathbf{C}^T(\mathbf{y}^b, t) \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{q}^b(\mathbf{y}^b, \dot{\mathbf{y}}^b, t)$$