Holonome MKS in Baumstruktur

Für MKS mit Baumstruktur lässt sich immer eine Beschreibung mit minimalen verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^f$ finden. Dabei ist f die Anzahl der Freiheitsgrade und p die Anzahl der Körper des Systems.

Kinematik

Position und Orientierung

$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{y}, t) \qquad i = 1(1)p$

$\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i(\mathbf{y}, t)$

Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{y}, t)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \dot{\mathbf{s}}_i = \frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial t} = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) \cdot \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{y}, t)$$

Beschleunigungen

$$\mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{J}_{Ti} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{J}}_{Ti} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\mathbf{v}}}_i = \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{a}}_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{J}_{Ri} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{J}}_{Ri} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$$

Virtuelle Verrückungen

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} = \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) \cdot \delta \mathbf{y}$$

$$\delta \mathbf{s}_i = \frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) \cdot \delta \mathbf{y}$$

d’Alembertsche Prinzip

$$\sum_{i=1}^{p} [\delta \mathbf{r}_i \cdot (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{f}_i^e) + \delta \mathbf{s}_i \cdot (\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{l}_i^e)] = 0$$

Durch einsetzen der virtuellen Verrückungen in das d'Alembertsche Prinzip folgt

$$\delta\mathbf{y} \cdot \sum_{i=1}^{p} [\mathbf{J}_{Ti}^{T} \cdot (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{f}_i^e) + \mathbf{J}_{Ri}^{T} \cdot (\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{l}_i^e)] = 0 \qquad \forall \delta\mathbf{y}$$

Mit Satz 2.1 ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{p} [\mathbf{J}_{Ti}^{T} \cdot (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{f}_i^e) + \mathbf{J}_{Ri}^{T} \cdot (\mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{l}_i^e)] = 0$$

Das Einarbeiten der Kinematik führt zu

$$\sum_{i=1}^{p} \left[\mathbf{J}_{Ti}^{T} \cdot m_i \cdot \mathbf{J}_{Ti} + \mathbf{J}_{Ri}^{T} \cdot \mathbf{I}_i \cdot \mathbf{J}_{Ri}\right] \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \sum_{i=1}^{p} [\mathbf{J}_{Ti}^{T} \cdot m_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_i + \mathbf{J}_{Ri}^{T} \cdot \mathbf{I}_i \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i + \mathbf{J}_{Ri}^{T} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \cdot \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i] =$$

$$\sum_{i=1}^{p} [\mathbf{J}_{Ti}^{T} \cdot \mathbf{f}_i^e + \mathbf{J}_{Ri}^{T} \cdot \mathbf{l}_i^e]$$

Bewegungsgleichungen für holonome MKS

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$$