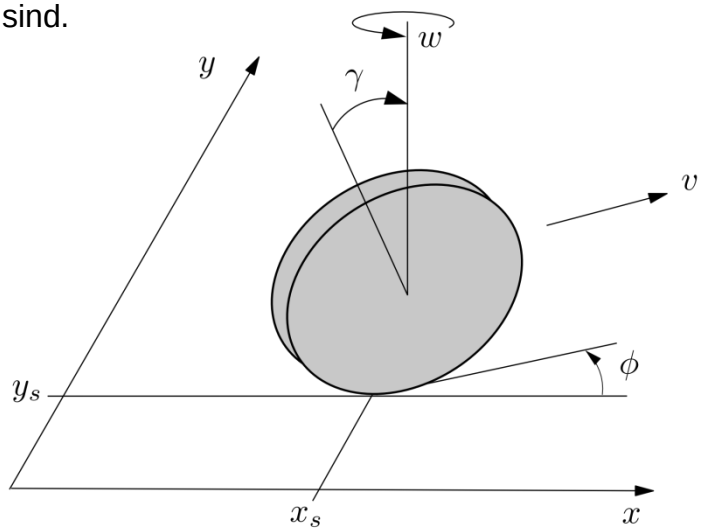
Nichtholonome Bindungen

Untersuchen Sie unter Verwendung der Lie-Klammern, ob für die folgenden Systeme die kinematischen Bindungen nichtholonom sind.



a.) Rollendes Rad auf Ebene.

$\bar{f} = 4, \quad \mathbf{y} = (x_s, y_s, \phi, \gamma)$
$\mathbf{z} = (v, \omega)$

$$\Delta_0 = \mathrm{span}\{g_1, g_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \\ 1/r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Es ergeben sich die Lie-Klammern

$$g_3^a = [g_1, g_1] = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad g_3^b = [g_2, g_2] = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad g_3^c = [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Somit lautet eine neue Richtung $g_3 =$ _____

$$\Delta_1 = \mathrm{span}\{g_1, g_2, g_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \\ 1/r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \right\}$$

Für Δ_1 ergeben sich die Lie-Klammern

$$g_4^a = [g_1, g_3] = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad g_4^b = [g_2, g_3] = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad g_4^c = [g_3, g_3] = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich die neue Richtung $g_4 =$ _____

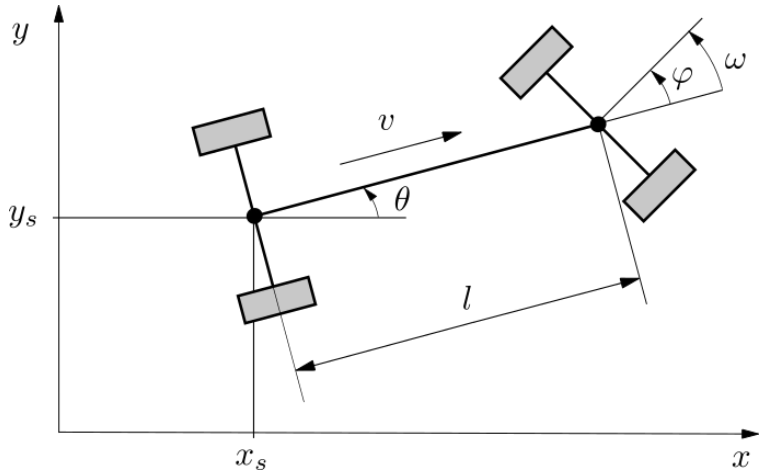
$$\Delta_2 = \mathrm{span}\{g_1, g_2, g_3, g_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \\ 1/r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \right\}$$

Somit sind beide kinematischen Bedingungen _____

b.) Kinematisches Fahrzeugmodell.

$\bar{f} = 4, \quad \mathbf{y} = (x_s, y_s, \theta, \varphi)$
$\mathbf{z} = (v, \omega)$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\mathbf{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}}_{g_1} \underbrace{\quad}_{g_2} \cdot \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$$



$$\Delta_0 = \mathrm{span}\{g_1, g_2\} \left\{ \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \right\}$$

Es ergeben sich die Lie-Klammern

$$g_3^a = [g_1, g_1] = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, g_3^b = [g_2, g_2] = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, g_3^c = [g_1, g_2] = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Somit lautet eine neue Richtung $\mathrm{g}_3 =$ _____

$$\Delta_1 = \mathrm{span}\{\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \right\}$$

Für Δ_1 ergeben sich die Lie-Klammern

$$\mathrm{g}_4^{\mathrm{a}} = [\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_3] = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \mathrm{g}_4^{\mathrm{b}} = [\mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3] = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \mathrm{g}_4^{\mathrm{c}} = [\mathrm{g}_3, \mathrm{g}_3] = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich die neue Richtung $\mathrm{g}_4 =$ _____

$$\Delta_2 = \mathrm{span}\{\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3, \mathrm{g}_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \right\}$$

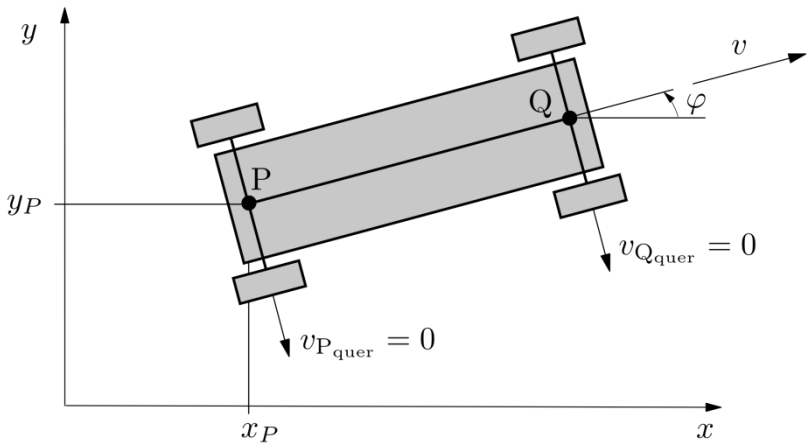
Somit sind beide kinematischen Bedingungen _____

c.) Karren mit zwei Achsen.

$\bar{f} = 3, \quad \mathbf{y} = (x_p, y_p, \varphi)$

$\mathbf{z} = (v)$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\,\mathbf{z} = \mathbf{g}\,\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cdot v$$



$$\Delta_0 = \mathrm{span}\{g\}\left\{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}\right\}$$

Es ergibt sich die Lie-Klammer

$$g_2 = [g_1, g_1] = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix},$$

Somit ergibt sich _____ neue Richtung und die Bindung ist

_____.