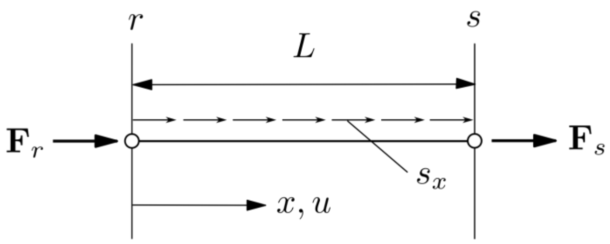
Lokale Bewegungsgleichung eines Stabes

Der eindimensionale Stab mit den Knoten r, s und Knotenverschiebungen $\mathrm{q_r}$, $\mathrm{q_s}$ ist eines der einfachsten Elemente in der FEM.

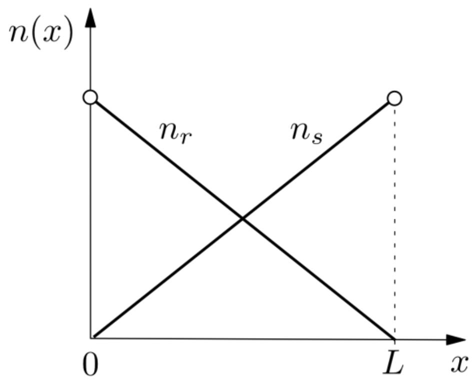


Prinzip von d'Alembert für Stab mit Länge L, konstantem Querschnitt A und E-Modul E:

$$\int_0^L \delta u\, \rho A \ddot{u}\, dx + \int_0^L \delta\varepsilon_x E A \varepsilon_x\, dx = \int_0^L \delta u\, s_x\, dx + F_r \delta q_r + F_s \delta q_s$$

Lineare Ansatzfunktion für das Verschiebungsfeld:

$$u(x) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}_j = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_r \\ q_s \end{bmatrix}$$



Die Matrix der Verzerrungen $\mathbf{B}$ ergibt sich durch Differentiation der Matrix $\mathbf{N}$. Somit lautet die Verschiebungs-Verzerrungsbeziehung:

$$\varepsilon_x(x) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}_j = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_r \\ q_s \end{bmatrix}$$

Die lokale Massenmatrix des Stabes lautet:

$$\mathbf{M}_e = \int_0^L \rho \mathrm{N}^T \cdot \mathrm{N} A dx = \rho A \int_o^L \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \qquad \qquad \end{bmatrix} dx$$

$$= \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} \qquad \qquad \qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix} dx = \frac{\quad}{} \begin{bmatrix} \qquad \qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Die lokale Steifigkeitsmatrix des Stabes mit dem Materialgesetz $\sigma = E\varepsilon$ lautet:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot E \cdot \mathbf{B} A dx = \frac{\quad}{} \int_o^L \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \qquad \qquad \end{bmatrix} dx$$

$$= \frac{\quad}{} \int_0^L \begin{bmatrix} \qquad \qquad \qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix} dx = \frac{\quad}{} \begin{bmatrix} \qquad \qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Der Vektor der Kräfte aus der Streckenlast lautet:

$$\mathbf{f}_{e,v} = s_x \int_0^L \mathbf{N}^T \, dx = \frac{\quad}{\quad} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Der Vektor der Kräfte aus den Randlasten lautet:

$$\mathbf{f}_{e,s} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Somit ist die lokale Bewegungsgleichung des Stabelements in Elementkoordinaten:

$$\frac{\quad}{\quad} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \frac{\quad}{\quad} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$