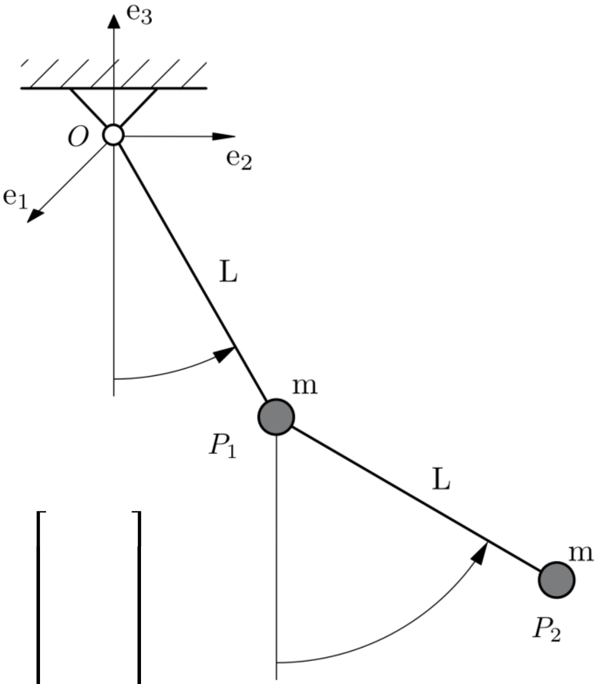
Bewegungsgleichungen eines Doppelpendels als differential-algebraisches Gleichungssystem



Es wird die ebene Bewegung eines Doppelpendels betrachtet. Die Pendelkörper haben gleiche Längen L und gleiche Massen m. Die Massen werden als Punktmassen angenommen.

Es werden die redundanten Koordinaten

$$\mathbf{x} = [\mathbf{r}_1^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{r}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [\mathrm{x}_1\ \mathrm{y}_1\ \mathrm{z}_1\ \mathrm{x}_2\ \mathrm{y}_2\ \mathrm{z}_2]^{\mathrm{T}}$$

gewählt, wobei $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ die Positionen der Massepunkte beschreiben.

Die Zwangsbedingungen in impliziter Form lauten

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Es folgt daraus die Variation der Bindungsgleichungen

$$\delta\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \cdot \delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Somit ergibt sich das zu lösende DAE-System aus der Lagrangeschen Gleichung erster Art

$$\begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} \qquad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

und der Bindungsgleichung $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Dies ist eine Index 3 DAE.

Schließlich simulieren Sie mit dem `ode15s`-Solver aus Matlab das Doppelpendel in DAE-Form. Benutzen Sie dafür die folgende Einstellung:

$$\mathrm{m}_1 = \mathrm{m}_2 = 1.0\ \mathrm{kg}, \qquad \mathrm{l}_1 = \mathrm{l}_2 = 1.0\ \mathrm{m}, \qquad \mathrm{g} = 9.81\ \mathrm{m/s^2}\,, \qquad \mathrm{t}\ \in [\,0{,}10]\ \mathrm{s},$$

$$\mathbf{x}_0 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \qquad \dot{\mathbf{x}}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\lambda}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$