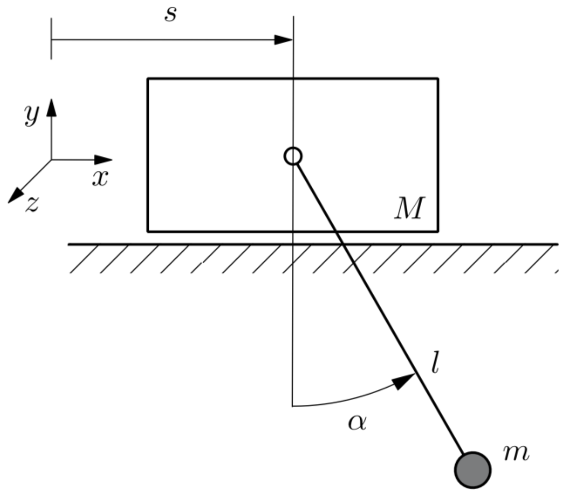
Bewegungsgleichungen mit verallgemeinerten Geschwindigkeiten

Es soll die Bewegungsgleichung eines Portalkrans mittels verallgemeinerten Geschwindigkeiten hergeleitet werden.

Der Portalkran kann mit den 3 verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y} = [s \quad l \quad \alpha]^{\mathrm{T}}$ beschreiben werden.



Position des Wagens und der Punktmasse

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_2(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeit des Wagens und der Punktmasse

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

Wahl verallgemeinerter Geschwindigkeiten

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{y}}$$

Geschwindigkeiten des Wagens und der Punktmasse als Funktion von $\mathbf{z}$

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

Beschleunigungen des Wagens und der Punktmasse

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{L}_{\mathrm{T}_1} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \widetilde{\mathbf{a}_1} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{L}_{\mathrm{T}_2} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \widetilde{\mathbf{a}_2} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

Unter Berücksichtigung der Kinematik sollen die Bewegungsgleichungen des Portalkrans in Minimalkoordinaten aufgestellt werden.

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\mathrm{t},\mathbf{y}) \cdot \dot{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{k}}(\mathrm{t},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \widetilde{\mathbf{q}}(\mathrm{t},\mathbf{y},\mathbf{z})$$

Dabei gilt für die globale Massenmatrix

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\mathrm{t},\mathbf{y}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \mathbf{L}_{\mathrm{T}_\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{m}_\mathrm{i} \cdot \mathbf{L}_{\mathrm{T}_\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

Weiterhin ergibt sich für den Vektor der verallgemeinerten Coriolis- und Zentrifugalkräfte

$$\tilde{\mathbf{k}}(\mathrm{t},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \mathbf{L}_{\mathrm{T_i}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{m_i} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Unter Berücksichtigung der Gravitationskräfte auf die Körper

$$\mathbf{f}_1^{\mathrm{e}} = [0 \quad -\mathrm{Mg} \quad 0]^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{f}_2^{\mathrm{e}} = [0 \quad -\mathrm{mg} \quad 0]^{\mathrm{T}},$$

folgt schließlich für den Vektor der verallgemeinerten eingeprägten Kräfte

$$\tilde{\mathbf{q}}(\mathrm{t},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \mathbf{L}_{\mathrm{T_i}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Die Dynamik des Krans ergibt sich aus der kinematischen Differenzialgleichung und der Bewegungsgleichung:

$$\mathbf{z} = \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{q}}$$

Zum Vergleich ergibt sich die Bewegungsgleichung ohne Verwendung allgemeiner Geschwindigkeiten zu

$$\begin{bmatrix} \mathrm{M}+\mathrm{m} & \mathrm{m}\sin\alpha & \mathrm{m\,l}\cos\alpha \\ \mathrm{m}\sin\alpha & \mathrm{m} & 0 \\ \mathrm{m\,l}\cos\alpha & 0 & \mathrm{m\,l}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathrm{s}} \\ \ddot{\mathrm{l}} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{m\,l}\,\dot{\alpha}^2 \sin\alpha - 2\,\mathrm{m}\,\dot{\mathrm{l}}\,\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \mathrm{m\,l}\,\dot{\alpha}^2 \\ -2\,\mathrm{m\,l}\,\dot{\mathrm{l}}\,\dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{m\,g}\cos\alpha \\ -\mathrm{m\,g\,l}\sin\alpha \end{bmatrix}$$