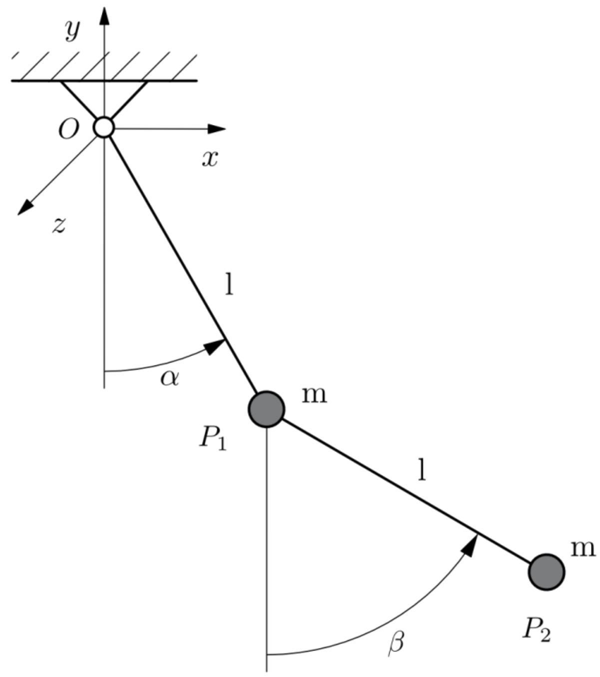
Bewegungsgleichungen eines Doppelpendels



Wir betrachten die 2-dimensionale Bewegung eines Doppelpendels, dessen Pendelkörper gleiche Längen l und gleiche Massen m haben. Die Massen werden als Punktmassen angenommen.

Die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems beträgt

$$\mathrm{f} = \_\_\_\_\_\_$$

Wählt man die Winkel ______ und ______ als verallgemeinerte Koordinaten, so erhält man für den Vektor der verallgemeinerten Koordinaten

$$\mathbf{y} = [\alpha \quad \beta]^{\mathrm{T}}$$

Die Lagevektoren der zwei Punktmassen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ ergeben sich zu

$$\mathbf{r}_1(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_2(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

Die zugehörigen Jacobi-Matrizen lauten

$$\mathbf{J}_{\mathrm{T}_1} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}_{\mathrm{T}_2} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

und für die lokalen Geschwindigkeiten gilt:

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{v}}_2 = \_\_\_\_\_\_$$

Für die absoluten Geschwindigkeiten ergibt sich

$$\mathbf{v}_1 = \underline{\hspace{2cm}} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{5cm}} \\ \underline{\hspace{5cm}} \\ \underline{\hspace{5cm}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \underline{\hspace{2cm}} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{5cm}} \\ \underline{\hspace{5cm}} \\ \underline{\hspace{5cm}} \end{bmatrix}$$

und für die absoluten Beschleunigungen gilt:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{7cm}} \\ \underline{\hspace{7cm}} \\ \underline{\hspace{7cm}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{12cm}} \\ \underline{\hspace{12cm}} \\ \underline{\hspace{12cm}} \end{bmatrix}.$$

Welche Struktur haben die Beschleunigungsterme?

$$\mathbf{a}_\mathrm{i} = \mathbf{a}_\mathrm{i}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}) = \underline{\hspace{2.5cm}} + \underline{\hspace{2.5cm}}$$

$$\mathbf{a}_1 = \underline{\hspace{2.5cm}} + \begin{bmatrix} \underline{\hspace{4cm}} \\ \underline{\hspace{4cm}} \\ \underline{\hspace{4cm}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_2 = \underline{\qquad\qquad} + \begin{bmatrix} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \end{bmatrix}.$$

Unter Berücksichtigung der Kinematik sollen die Bewegungsgleichungen des Doppelpendels in Minimalkoordinaten aufgestellt werden.

$$\mathbf{M}(\mathrm{t}, \mathbf{y}) \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathrm{t}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{q}(\mathrm{t}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}).$$

Dabei gilt für die globale Massenmatrix

$$\mathbf{M}(\mathrm{t}, \mathbf{y}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \mathbf{J}_{\mathrm{T_i}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{m_i} \cdot \mathbf{J}_{\mathrm{T_i}} = \begin{bmatrix} \underline{\qquad\qquad\qquad} & \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} & \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{bmatrix}.$$

Weiterhin ergibt sich für den Vektor der verallgemeinerten Coriolis- und Zentrifugalkräfte

$$\mathbf{k}(\mathrm{t}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \mathbf{J}_{\mathrm{T_i}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{m_i} \cdot \bar{\mathbf{a}}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \end{bmatrix}.$$

Unter Berücksichtigung der Gravitationskräfte auf die Pendelkörper

$$\mathbf{f}_1^{\mathrm{e}} = [0 \quad -\mathrm{mg} \quad 0]^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{f}_2^{\mathrm{e}} = [0 \quad -\mathrm{mg} \quad 0]^{\mathrm{T}},$$

folgt schließlich für den Vektor der verallgemeinerten eingeprägten Kräfte

$$\mathbf{q}(\mathrm{t}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \mathbf{J}_{\mathrm{T_i}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \end{bmatrix}.$$