Mechanische Systeme mit mehreren Freiheitsgraden

$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)$, Bewegungsgleichung

$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N, \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{R}^N$, Anfangsbedingungen

Massenmatrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0$

Dämpfungsmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ (für fast alle mechanischen Systeme)

Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ (für fast alle mechanischen Systeme)

Erregung $\mathbf{F}(t) \in \mathbb{R}^N$

Anzahl Freiheitsgrade N

(Konservative Systeme: $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T > 0$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T > 0$)

Lösungsansatz $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\mathrm{h}(t) + \mathbf{x}_\mathrm{p}(t)$

Homogener Lösungsanteil $\mathbf{x}_\mathrm{h}(t)$:
Freie Schwingung aus
Anfangsbedingungen

Partikulärer Lösungsanteil $\mathbf{x}_\mathrm{p}(t)$:
Erzwungene Schwingung aus
Fremderregung

1 Ungedämpfte Systeme

1.1 Homogene Lösung

Ansatz:

$$\mathbf{x}_\mathrm{h}(t) = \mathbf{X}e^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{C}^N$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{X}e^{\mathrm{i}\omega t} = \mathbf{0}$$

- Eigenwertproblem
- nur nicht-triviale Lösungen für $\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$
- $\omega_r \in \mathbb{R}$, $r = 1, \ldots, N$ Eigenfrequenzen
- $\boldsymbol{\psi}_r \in \mathbb{R}^N$, $r = 1, ..., N$ Eigenvektoren/Eigenschwingungsformen

Allgemeine homogene Lösung:

$$\mathbf{x}_\mathrm{h}(t) = \sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{\psi}_r e^{\mathrm{i}\omega_r t} \varphi_r = \boldsymbol{\psi} \mathrm{diag}\{e^{\mathrm{i}\omega_r t}\} \boldsymbol{\varphi}$$

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\psi}_N \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{diag}\{e^{\mathrm{i}\omega_r t}\} = \begin{bmatrix} e^{\mathrm{i}\omega_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mathrm{i}\omega_N t} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_N \end{bmatrix}^T \text{ aus Anfangsbedingungen}$$

1.2 Partikuläre Lösung

Beschränkung auf harmonische Anregungen

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F} e^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{C}^N$$

Ansatz:

$$\mathbf{x}_\mathrm{p}(t) = \mathbf{X}_\mathrm{p} e^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \mathbf{X}_\mathrm{p} \in \mathbb{C}^N$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X}_\mathrm{p} e^{\mathrm{i}\omega t} = \mathbf{F} e^{\mathrm{i}\omega t} \Rightarrow \mathbf{X}_\mathrm{p} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{F}$$

Allgemeine partikuläre Lösung:

$$\mathbf{X}_\mathrm{p} = \boldsymbol{\alpha}(\omega) \mathbf{F}$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \ldots \text{ Frequenzgangsmatrix}$$

- $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$ beschreibt Ein-/Ausgangsverhalten
- $\boldsymbol{\alpha}_{jk}(\omega)$ beschreibt E/A-Verhalten von Eingang k auf Ausgang j für $\mathrm{F}_m = 0$, $m \neq k$
- $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$ prinzipiell durch $\boldsymbol{\alpha}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1}$ berechenbar, aber sehr aufwändig. Effizientere Lösung siehe Abschnitt **??**
- E/A-Verhalten von
  - Kraft auf Verschiebung heißt Rezeptanz $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$
  - Kraft auf Geschwindigkeit heißt Mobilität $\boldsymbol{Y}(\omega) = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{\alpha}(\omega)$
  - Kraft auf Beschleunigung heißt Akzeleranz $\boldsymbol{A}(\omega) = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{Y}(\omega) = -\omega^2\boldsymbol{\alpha}(\omega)$

1.3 Orthogonalitätseigenschaften

Für konservative Systeme mit $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ und $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ bestehen die Orthogonalitätseigenschaften

$$\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi} = \widetilde{\mathbf{M}} = \mathrm{diag}\{m_r\}$$

mit $\widetilde{\mathbf{M}}$...modale Massenmatrix

m_r...modale Massen

$$\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi} = \widetilde{\mathbf{K}} = \mathrm{diag}\{k_r\}$$

mit $\widetilde{\mathbf{K}}$...modale Steifigkeitsmatrix

k_r...modale Steifigkeiten

- modale Massen- und Steifigkeitsmatrix $\widetilde{\mathbf{M}}$ und $\widetilde{\mathbf{K}}$ sind nicht eindeutig

  $\Rightarrow$ nur Verhältnis von modalen Massen zu Steifigkeiten ist eindeutig: $\dfrac{k_r}{m_r} = \omega_r^2 = \text{const.}$

  $\Rightarrow$ Massennormalisierung für $\boldsymbol{\phi}_r = \dfrac{\boldsymbol{\psi}_r}{\sqrt{m_r}} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{I} \\ \widetilde{\mathbf{K}} = \mathrm{diag}\{\omega_r^2\} \end{cases}$

  $\Rightarrow$ Steifigkeitsnormalisierung für $\boldsymbol{\phi}_r = \dfrac{\boldsymbol{\psi}_r}{\sqrt{k_r}} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{\mathbf{M}} = \mathrm{diag}\left\{\dfrac{1}{\omega_r^2}\right\} \\ \widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{I} \end{cases}$

- Orthogonalitätseigenschaften können zur effizienten Berechnung der Frequenzgangsmatrix ausgenutzt werden

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\alpha}(\omega)^{-1} \boldsymbol{\psi} &= \boldsymbol{\psi}^T (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\psi} \\
(\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\alpha}(\omega)^{-1} \boldsymbol{\psi})^{-1} &= (\widetilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \widetilde{\mathbf{M}})^{-1} \\
\boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi}^{-1} \boldsymbol{\alpha}(\omega) \boldsymbol{\psi}^{-T} \boldsymbol{\psi}^T &= \boldsymbol{\psi} (\widetilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \widetilde{\mathbf{M}})^{-1} \boldsymbol{\psi}^T \\
\boldsymbol{\alpha}(\omega) &= \boldsymbol{\psi} (\widetilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \widetilde{\mathbf{M}})^{-1} \boldsymbol{\psi}^T \\
\boldsymbol{\alpha}(\omega) &= \boldsymbol{\psi} \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{k_r - \omega^2 m_r}\right\} \boldsymbol{\psi}^T
\end{aligned}$$

Spektraldarstellung des j,k-ten Eintrags der Frequenzgangsmatrix $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$ über Summation über alle Eigenmoden:

$$\boldsymbol{\alpha}_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{k_r - \omega^2 m_r} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\omega_r^2 - \omega^2}$$

2 Proportional gedämpfte Systeme

Proportionale Dämpfung liegt vor, wenn

$$\left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\right)\left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\right) = \left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\right)\left(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\right)$$

gilt. Wichtigster Vertreter ist die Rayleigh-Dämpfung mit

$$\mathbf{C} = \beta\mathbf{M} + \gamma\mathbf{K}.$$

Für Systeme mit sehr kleiner Dämpfung stellt diese oft eine gute Näherung dar.

Mit den Eigenschwingungsformen des zugeordneten ungedämpften Systems $\boldsymbol{\psi}$ und den Orthogonalitätsbedingungen folgt

$$\boldsymbol{\psi}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^T\left(\beta\mathbf{M} + \gamma\mathbf{K}\right)\boldsymbol{\psi} = \beta\widetilde{\mathbf{M}} + \gamma\widetilde{\mathbf{K}} = \widetilde{\mathbf{C}} = \mathrm{diag}\{c_r\} = \mathrm{diag}\{\beta m_r + \gamma k_r\}$$

- Eigenschwingungsformen des zugeordneten ungedämpften Systems sind auch Eigenschwingungsformen des proportional gedämpften Systems und können reell dargestellt werden
- Es gelten die Orthogonalitätsbeziehungen des ungedämpften Systems

2.1 Homogene Lösung

- $\lambda_{r1,2} = -\omega_r\zeta_r \pm \mathrm{i}\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2} \in \mathbb{C}$, $2N$ komplex konjugierte Eigenwerte
- $\omega_r^2 = \dfrac{k_r}{m_r}$, Eigenfrequenzen des zugeordneten ungedämpften Systems
- $\zeta_r = \dfrac{c_r}{2\sqrt{k_r m_r}} = \dfrac{c_r}{2\omega_r m_r}$, modale Dämpfung

Allgemeine homogene Lösung:

$$\mathbf{x}_\mathrm{h}(t) = \sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{\psi}_r e^{-\zeta_r\omega_r t} e^{\mathrm{i}\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2}t}\varphi_r$$

$\boldsymbol{\psi}_r$, Eigenschwingungsform des zugeordneten ungedämpften Systems

$e^{-\zeta_r\omega_r t}$, exponentielle Dämpfung

$e^{\mathrm{i}\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2}t}$, oszillatorischer Anteil

φ_r aus Anfangsbedingungen

- $\lim\limits_{t\to\infty}\|\mathbf{x}_\mathrm{h}(t)\| = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$ homogener Teil klingt ab, nur partikulärer Anteil verbleibt

2.2 Partikuläre Lösung

Analog zum ungedämpften System:

$$\mathbf{X}_\mathrm{p} = (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + \mathrm{i}\omega\mathbf{C})^{-1}\mathbf{F}$$

Allgemeine partikuläre Lösung:

$$\mathbf{X}_\mathrm{p} = \boldsymbol{\alpha}(\omega)\mathbf{F}$$
$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + \mathrm{i}\omega\mathbf{C})^{-1}$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{k_r - \omega^2 m_r + \mathrm{i}\omega c_r} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\omega_r^2 - \omega^2 + \mathrm{i}2\omega_r\omega\zeta_r}$$

- Frequenzgang $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$ komplex
- Prinzipielle Möglichkeit zur experimentellen Ermittlung von $\boldsymbol{\alpha}_{jk}(\omega)$
  1. harmonische Anregung in k
  2. warten bis $\mathbf{x}_\mathrm{h} \approx 0$
  3. Messung von $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_\mathrm{p}(t)$ in j nach Betrag und Phase $\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_{jk}(\omega)$
  4. Wiederholung für „alle“ ω