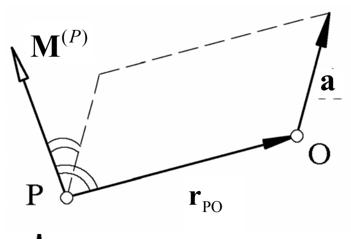
Systeme gebundener Vektoren

Definition

Ein gebundener Vektor $\mathbf{a}$ besitzt einen festen Anfangspunkt O. Seine mathematische Beschreibung kann durch einen Vektor $\mathbf{a}$ und einen Ortsvektor $\mathbf{r}_{\mathrm{PO}}$ mit dem Anfangs- oder Bezugspunkt P erfolgen

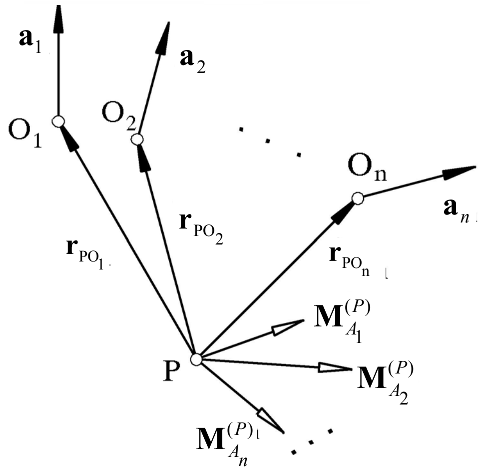


$$\{\mathbf{r}_{\mathrm{PO}}\,,\ \mathbf{a}\}\ .$$

Die Wirkung eines gebundenen Vektors wird durch das Moment

$$\mathbf{M}^{(P)} = \mathbf{r}_{PO} \times \mathbf{a}$$

definiert.



Ein System A, das durch die gebundenen Vektoren $\mathbf{a}_i$, $\mathrm{i} = 1(1)\mathrm{n}$, mit den festen Anfangspunkten $\mathrm{O_i}$ gebildet wird, kann nicht nach den Regeln der Vektoralgebra durch Addition zusammengefasst werden, da die Parallelverschiebung der Vektoren $\mathbf{a}_i$ nicht erlaubt ist. Jedoch können die Momente mit dem gemeinsamen Bezugspunkt P addiert werden

$$\mathbf{M}_A^{(P)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{A_i}^{(P)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_{\mathrm{PO}_i} \times \mathbf{a}_i \quad .$$

Äquivalenz

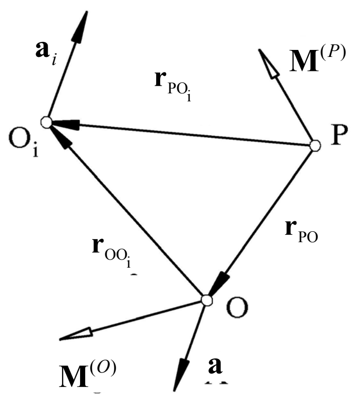
Zwei Systeme A und B von gebundenen Vektoren heißen äquivalent, wenn sie für jeden beliebigen Bezugspunkt P dasselbe Moment ergeben (Äquivalenzaxiom)

$$(\mathbf{a}_1\,,\ \mathbf{a}_2\,,\ \ldots\,,\ \mathbf{a}_n) \sim (\mathbf{b}_1\,,\ \mathbf{b}_2\,,\ \ldots\,,\ \mathbf{b}_m)\ ,\quad \text{falls}\ \ \mathbf{M}_A^{(P)} = \mathbf{M}_B^{(P)}\ ,\quad \mathrm{P}\ \text{beliebig.}$$

Für die praktische Anwendung ist das Äquivalenzaxiom wenig geeignet, da die Momentengleichheit für *jeden beliebigen* Bezugspunkt erfüllt sein muss.

Reduktion

Jedes System gebundener Vektoren kann auf einen äquivalenten Vektorwinder reduziert werden, der sich für *einen festen* Bezugspunkt O berechnen lässt. Der Vektorwinder entspricht den Anforderungen der Praxis.



Das Moment

$$\mathbf{M}^{(P)} = \mathbf{r}_{\mathrm{PO}} \times \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_{\mathrm{OO}_i} \times \mathbf{a}_i = \mathbf{r}_{\mathrm{PO}} \times \mathbf{a} + \mathbf{M}^{(O)}$$

für den beliebigen Punkt P wird durch den von Punkt P abhängigen Ortsvektor $\mathbf{r}_{\mathrm{PO}}$ und die von P unabhängigen Vektoren

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i\ ,\quad \mathbf{M}^{(O)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_{\mathrm{OO}_i} \times \mathbf{a}_i$$

bestimmt. Damit ist der äquivalente Vektorwinder gefunden

$$(\mathbf{a}_1\,,\ \mathbf{a}_2\,,\ \ldots\,,\ \mathbf{a}_n) \sim (\mathbf{a},\ \mathbf{M}^{(O)}) \sim (\mathbf{a},\ \mathbf{M}^{(P)})$$

Die Elemente des Vektorwinders, der gebundene resultierende Vektor $\mathbf{a}$ und das freie resultierende Moment $\mathbf{M}^{(O)}$, werden nach den Regeln der Vektoralgebra gebildet.

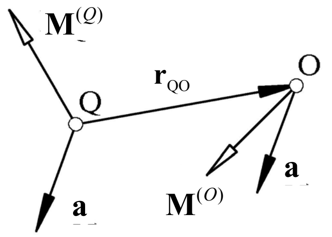
Zwei Systeme A und B von gebundenen Vektoren sind damit äquivalent, wenn ihre Winder übereinstimmen

$$(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \dots,\ \mathbf{a}_n) \sim (\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \dots,\ \mathbf{b}_m)\ ,\quad \text{falls}\ \mathbf{a} = \mathbf{b}\ \text{ und }\ \mathbf{M}_A^{(O)} = \mathbf{M}_B^{(O)}\ ,\quad \mathrm{O}\ \text{fest.}$$

Transformation

Wird der feste Bezugspunkt O des Vektorwinders z.B. durch eine Koordinatentransformation in den ebenfalls festen Bezugspunkt Q verschoben, so ändert sich nur das zweite Element des Vektorwinders entsprechend dem Transformationsgesetz

$$\mathbf{M}^{(Q)} = \mathbf{r}_{\mathrm{QO}} \times \mathbf{a} + \mathbf{M}^{(O)}\ .$$



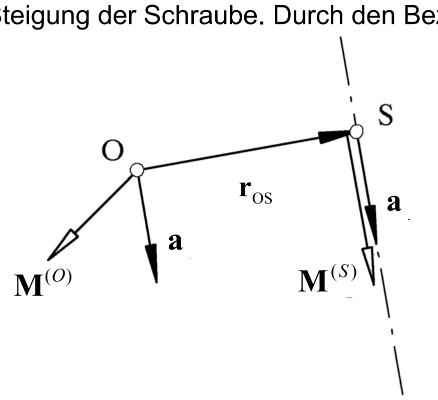
Die Vektorwinder eines Systems von gebundenen Vektoren bezüglich der Punkte O und Q sind äquivalent, wenn sich ihre Momente nach dem Transformationsgesetz ändern

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{M}^{(O)}) \sim (\mathbf{a},\ \mathbf{M}^{(Q)})\ ,$$

$$\text{falls}\ \ \mathbf{M}^{(Q)} = \mathbf{r}_{\mathrm{QO}} \times \mathbf{a} + \mathbf{M}^{(O)}\ ,\qquad \mathrm{O},\ \mathrm{Q}\ \text{fest.}$$

Vektorschraube - Normalform des Vektorwinders

Jeder Vektorwinder lässt sich durch Wechsel des Bezugspunktes von O nach S auf seine Normalform transformieren, in welcher der resultierende Vektor $\mathbf{a}$ und das resultierende Moment $\mathbf{M}^{(S)} = p\,\mathbf{a}$ dieselbe Richtung besitzen. Man bezeichnet die Normalform des Vektorwinders als Vektorschraube und p als die Steigung der Schraube. Durch den Bezugspunkt S und die Richtung von $\mathbf{a}$ wird die Zentralachse festgelegt



$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_{\mathrm{OS}} + \lambda\mathbf{a}\ ,\qquad \lambda\ \text{ Parameter.}$$

Im Einzelnen gelten die Beziehungen

$$p = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{M}^{(O)}}{a^2}\ ,\qquad \mathbf{r}_{OS} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{M}^{(O)}}{a^2}\ ,$$

wobei $\mathbf{r}_{\mathrm{OS}}$ den kürzesten Abstand zwischen O und der Zentralachse beschreibt und a der Betrag des Vektors $\mathbf{a}$ ist.

Die Vektorschraube besitzt keine große praktische Bedeutung.

Schritte bei der Untersuchung von Vektorsystemen

1) Skizze des Vektorsystems $(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \dots,\ \mathbf{a}_n)$

2) Wahl eines geeigneten Koordinatensystems $\left\{ \underbrace{\mathrm{O}}_{\text{Ursprung}}\ ,\ \underbrace{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z}_{\text{Achsenrichtungen}} \right\}$

3) Koordinatendarstellung der Ortsvektoren und Vektoren $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{a}_i\}$, $\ i = 1(1)n$

4) Berechnung des Vektorwinders $(\mathbf{a},\ \mathbf{M})$

- Vektorsystem $(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \dots,\ \mathbf{a}_n)$

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \ , \quad \mathbf{M}^{(O)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i$$

- System mit Vektorpaaren (freie Momente)

$$(\underbrace{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \dots,\ \mathbf{a}_n}_{\text{Vektoren}},\ \underbrace{\mathbf{a}_{n+1}, -\mathbf{a}_{n+1}}_{\text{freies Moment}}, \dots)$$

$$\sim (\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \dots,\ \mathbf{a}_n,\ \mathbf{M}_1, \dots)$$

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \ , \quad \mathbf{M}^{(O)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{l} \mathbf{M}_j$$