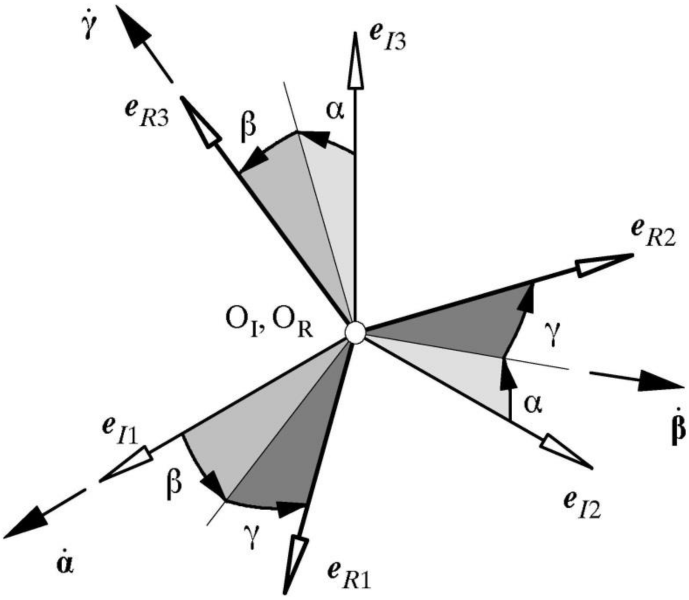
Euler− und Kardan−Winkel

Führt ein Körper nur Rotationen um einen festen Punkt aus, so genügen zur eindeutigen Lagebeschreibung des Körpers drei voneinander unabhängige Winkel. Fallen beispielsweise das Inertialsystem $\{0_\mathrm{I}, \mathbf{e}_{\mathrm{I}1}, \mathbf{e}_{\mathrm{I}2}, \mathbf{e}_{\mathrm{I}3}\}$ und das körperfeste Koordinatensystem $\{0_\mathrm{R}, \mathbf{e}_{\mathrm{R}1}, \mathbf{e}_{\mathrm{R}2}, \mathbf{e}_{\mathrm{R}3}\}$ zunächst zusammen, so kann eine allgemeine Drehung als Hintereinanderschaltung von elementaren Drehungen um Achsen des körperfesten Systems aufgefasst werden. Die endliche Drehung wird dabei durch eine Drehmatrix gekennzeichnet. Den Vektor der Winkelgeschwindigkeit erhält man entweder durch Differenzieren der Drehmatrix oder durch Addieren der Winkelgeschwindigkeitskomponenten der elementaren Drehungen, wobei aber die entsprechenden Koordinatentransformationen zu beachten sind.

Kardan−Winkel

Dreht man der Reihe nach um die momentanen Achsen $\mathbf{e}_{\mathrm{R}1}$, $\mathbf{e}_{\mathrm{R}2}$, $\mathbf{e}_{\mathrm{R}3}$, so heißen die zugehörigen Drehwinkel KARDAN−WINKEL und werden mit α, β, γ bezeichnet. Zu beachten ist, dass die Elementardrehungen nacheinander um die Achsen desjenigen Systems erfolgen, das durch die vorhergegangenen Drehungen entstanden ist.



Die zugehörige Drehmatrix hat die Form

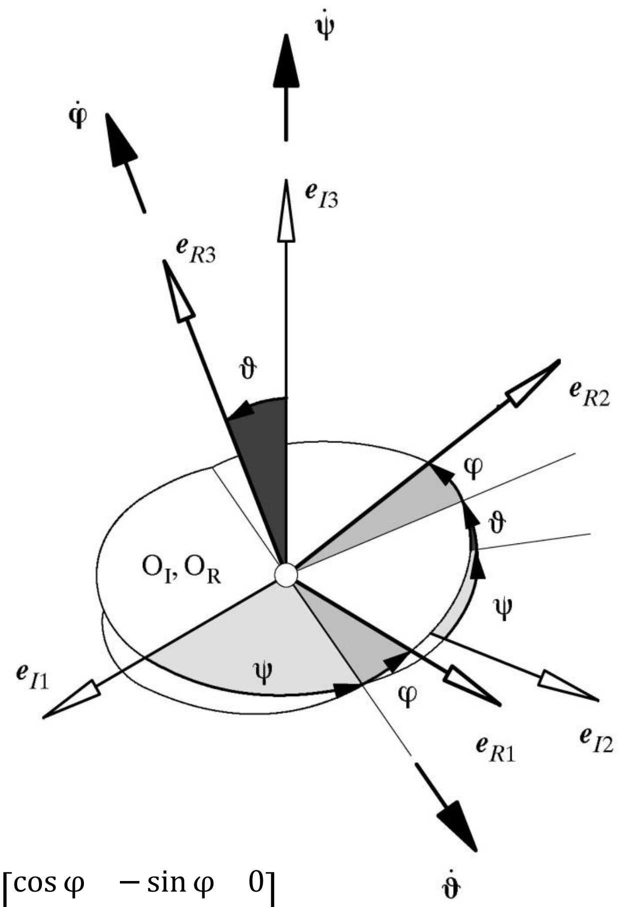
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

Im Inertialsystem $\{0_\mathrm{I}, \mathbf{e}_{\mathrm{I}1}, \mathbf{e}_{\mathrm{I}2}, \mathbf{e}_{\mathrm{I}3}\}$ lautet der Winkelgeschwindigkeitsvektor

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot\beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\gamma \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot\alpha \\ \dot\beta \\ \dot\gamma \end{bmatrix}.$$

Euler−Winkel

Führt man dagegen die Elementardrehungen so aus, dass sie nacheinander um die momentanen Achsen $\mathbf{e}_{\mathrm{R3}}$, $\mathbf{e}_{\mathrm{R1}}$, $\mathbf{e}_{\mathrm{R3}}$ erfolgen, so heißen die Drehwinkel EULER−WINKEL und werden mit ψ, ϑ, φ bezeichnet.



Die entsprechende Drehmatrix lautet

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \sin\psi\sin\vartheta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

und der Winkelgeschwindigkeitsvektor hat im Inertialsystem $\{O_{\mathrm{I}}, \mathbf{e}_{\mathrm{I1}}, \mathbf{e}_{\mathrm{I2}}, \mathbf{e}_{\mathrm{I3}}\}$ die Form

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cos\psi & \sin\psi\sin\vartheta \\ 0 & \sin\psi & -\cos\psi\sin\vartheta \\ 1 & 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Die EULER−WINKEL benützt man hauptsächlich in der Kreiseltheorie, während für technische Probleme und in der Luftfahrt meist KARDAN−WINKEL verwendet werden. Manchmal ist auch ein Wechsel der Beschreibungsart notwendig, um Singularitäten zu vermeiden und die Eindeutigkeit der Beschreibung zu gewährleisten.